

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الكتاب الأساسى

- الجبر والإحصاء
- الهندسة

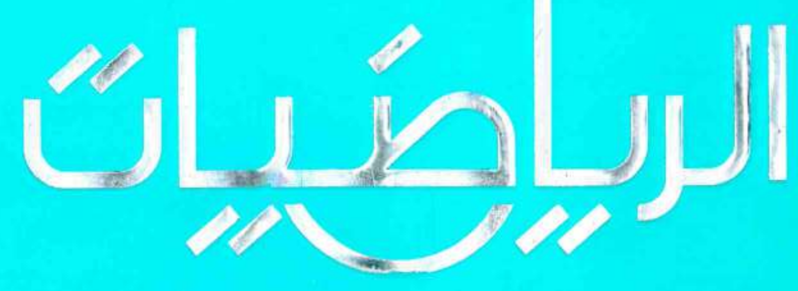
الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الأول





تطبيق التعلم التفاعلى



محتويات الكتاب

أولًا الجبـــر والإحصاء



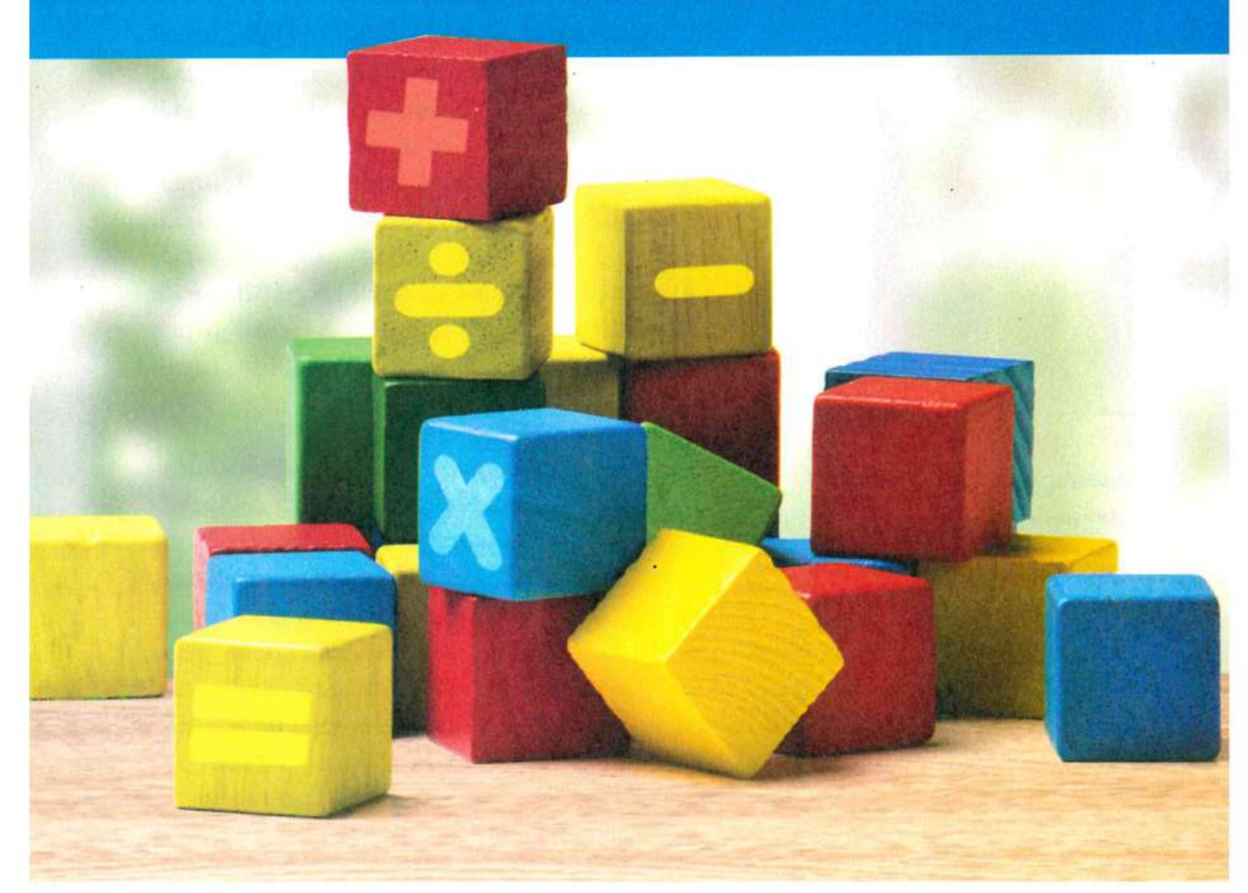
ثانيًا الهندســـة



الملاحظات الموجودة فى هامش بعض الصفحات **فى الهندسـة**، والمشار إليها بالعلامة (*) هي نظريات ونتائج تم دراستها سابقًا

أولاً

الجبر والإحصاء



الوحدة الأولى

الأعــداد الحقيقية

الدرس الأول : الجذر التكعيبى للعدد النسبى.
الدرس الثانى : مجموعة الأعداد غير النسبية ن.
الدرس الثالث : مجموعة الأعداد الحقيقية ح -علاقة الترتيب فى ح.
الدرس الرابع : الفــترات.
الدرس الخامس : العمليات على الأعداد الحقيقية.
الدرس السادس : العمليات على الجذور التربيعية.
الدرس السابع : العددان المترافقان.
الدرس الثامن : العمليات على الجذور التكعيبية.
الدرس التاسع : تطبيقات على الأعداد الحقيقية.
الدرس العاشر : حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح.

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

يمكنك
حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح **QR code** الخاص بكل امتحان



- يتعرف الجذر التكعيبى لعدد نسبى.
- يوجد الجذر التكعيبى لعدد نسبى.
- يتعرف مجموعة الأعداد غير النسبية.
- يمثل العدد غير النسبى على خط الأعداد.
- يتعرف مجموعة الأعداد الحقيقية.
- يجرى العمليات على الفترات.
- يجرى العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية.
- يجرى العمليات على الجذور التربيعية والتكعيبية.
- يتعرف العددين المترافقين.
- يطبق ما تعلمه فى الأعداد الحقيقية لإيجاد حجوم ومساحات بعض المجسمات.
- يحل معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح



الدرس 1 الجذر التكعيبى للعدد النسبى

تذكر الجذر التربيعى للعدد النسبى المربع الكامل

• **الجذر التربيعى للعدد النسبى المربع الكامل ؟ هو العدد النسبى الذى مربعه يساوى ؟**

• الرمز $\sqrt{\ }$ يدل على الجذر التربيعى الموجب لعدد ما

فمثلًا : العدد ٢٥ له جذران تربيعيان هما : ٥ ، −٥

لأن : $(٥)^{٢} = ٢٥$ ، $(-٥)^{٢} = ٢٥$

ونكتب : $\sqrt{٢٥} = ٥$ ، $-\sqrt{٢٥} = -٥$ ، $\pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$

> **لاحظ أن**
>
> الجذران التربيعيان للعدد النسبى كل منهما معكوس جمعى للآخر ومجموعهما يساوى الصفر.

• $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر

• $\sqrt{\text{عدد سالب}}$ ليس له معنى.

• $\sqrt{أ^{٢}} = |أ|$ فمثلًا : $\sqrt{٣^{٢}} = |٣| = ٣$ ، $\sqrt{(-٦)^{٢}} = |-٦| = ٦$

• أحيانًا نلجأ إلى تحليل العدد إلى عوامله الأولية لتسهيل إيجاد جذره التربيعى ، ثم نأخذ من كل عاملين متساويين عاملاً واحدًا ، فيكون حاصل ضرب هذه العوامل هو الجذر التربيعى لهذا العدد.

فمثلاً : $\because$ ٤٤١ = ٣ × ٣ × ٧ × ٧

$\therefore \sqrt{٤٤١}$ = ٣ × ٧

= ٢١

٤٤١	٣
١٤٧	٣
٤٩	٧
٧	٧
١	

(٣) (٧)

«يمكنك التأكد من الحل باستخدام الآلة الحاسبة».

الجذر التكعيبى للعدد النسبى

- حاصل ضرب عدد ما فى نفسه ثلاث مرات هو مكعب هذا العدد.

فمثلًا : العدد ٦٤ هو مكعب العدد ٤ لأن : ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

- العملية العكسية لإيجاد المكعب هى إيجاد الجذر التكعيبى ، فإيجاد الجذر التكعيبى لعدد ما يعنى إيجاد العدد الذى إذا ضُرب فى نفسه ثلاث مرات نحصل على هذا العدد.

فمثلًا : العدد ٤ هو الجذر التكعيبى للعدد ٦٤ لأن : ٦٤ = ٤ × ٤ × ٤

تعريف

الجذر التكعيبى للعدد $ا$ هو العدد الذى مكعبه يساوى $ا$

- يستخدم الرمز $\sqrt[٣]{\ }$ (ويُقرأ : الجذر التكعيبى) للتعبير عن الجذر التكعيبى لأى عدد.

فمثلًا : نرمز للجذر التكعيبى للعدد ٦٤ بالرمز $\sqrt[٣]{٦٤}$

- الجذر التكعيبى للعدد الموجب يكون موجبًا ، والجذر التكعيبى للعدد السالب يكون سالبًا.

فمثلًا : $\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$ ، $\sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$

أى أن : الجذر التكعيبى لأى عدد يكون له نفس إشارة هذا العدد.

إيجاد الجذر التكعيبى لعدد نسبى مكعب كامل

- العدد النسبى المكعب الكامل هو العدد النسبى الذى يمكن كتابته على صورة مكعب عدد نسبى أى $(\text{عدد نسبى})^٣$ مثل : $٨ = ٢^٣$ ، $-٢٧ = (-٣)^٣$
- الجذر التكعيبى لعدد نسبى مكعب كامل هو عدد نسبى. فمثلًا : $\sqrt[٣]{٨} = ٢$ ، $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$
- إذا كان العدد ليس مكعبًا كاملاً فإننا نكتب جذره التكعيبى باستخدام رمز الجذر التكعيبى.

فمثلًا : الجذر التكعيبى للعدد ٤ هو $\sqrt[٣]{٤}$ لأن العدد ٤ ليس مكعبًا كاملًا.

- $\sqrt[٣]{ا^٣} = ا$ فمثلًا : $\sqrt[٣]{٥^٣} = ٥$ ، $\sqrt[٣]{(-٥)^٣} = -٥$
- $\sqrt[٣]{ا^ن} = ا^{\frac{ن}{٣}}$ حيث $ن \in ص$ فمثلًا : $\sqrt[٣]{ا^٦} = ا^{\frac{٦}{٣}} = ا^٢$

- يمكن إيجاد الجذر التكعيبى لعدد نسبى مكعب كامل عن طريق التحليل كما فى المثال التالى.

مثال ١

أوجد كلًّا مما يأتى :

> يمكنك استخدام الآلة الحاسبة للتأكد من إجابتك

١ $\sqrt[3]{٢١٦}$ ٢ $\sqrt[3]{-\frac{٨}{١٢٥}}$ ٣ $\sqrt[3]{٠,٠٦٤}$

الحل

١ $\sqrt[3]{٢١٦} = ٢ \times ٣ = ٦$

٢١٦	٢
١٠٨	٢
٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

(٢) (٣)

٢ $\sqrt[3]{-\frac{٨}{١٢٥}} = -\frac{٢}{٥}$

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

(٢)

١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

(٥)

٣ $\sqrt[3]{٠,٠٦٤} = \sqrt[3]{\frac{٦٤}{١٠٠٠}} = \frac{٢ \times ٢}{٥ \times ٢}$

$= \frac{٤}{١٠} = ٠,٤$

٦٤	٢
٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

(٢) (٢)

١٠٠٠	٢
٥٠٠	٢
٢٥٠	٢
١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

(٢) (٥)

حاول بنفسك ١

أكمل ما يأتى :

١ $\sqrt[3]{٢٧} =$ ....

٢ $\sqrt[3]{-١٢٥} =$ ....

٣ $\sqrt[3]{٥١٢} =$ ....

٤ $\sqrt[3]{\frac{٢٧}{٨}} =$ ....

مثال ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ . $\sqrt[3]{............} = -٥$

(أ) ١٢٥ (ب) ٢٥ (جـ) −٢٥ (د) −١٢٥

٢ $\sqrt{٤} - \sqrt[3]{-٨} =$ ....

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ٨

٣ $\sqrt{(-٧)^٢} - \sqrt[٣]{(-٧)^٣} = $ ....

(أ) −١٤ (ب) صفر (جـ) ٧ (د) ١٤

٤ إذا كان : $\sqrt[٣]{س} = \sqrt{٤}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ± ٨

٥ $\sqrt{س^٤} = \sqrt[٣]{\text{............}}$

(أ) س (ب) $س^٢$ (جـ) $س^٤$ (د) $س^٦$

الحـــل

١ (د) **تفسير الحل :** $(-٥)^٣ = -١٢٥$

٢ (جـ) **تفسير الحل :** $\sqrt{٤} - \sqrt[٣]{-٨} = ٢ - (-٢) = ٢ + ٢ = ٤$

٣ (د) **تفسير الحل :** $\sqrt{(-٧)^٢} - \sqrt[٣]{(-٧)^٣} = ٧ - (-٧) = ٧ + ٧ = ١٤$

٤ (جـ) **تفسير الحل :** ∵ $\sqrt[٣]{س} = \sqrt{٤}$ ∴ $\sqrt[٣]{س} = ٢$ ∴ $س = ٢^٣ = ٨$

٥ (د) **تفسير الحل :** ∵ $\sqrt{س^٤} = س^٢$ ∴ $(س^٢)^٣ = س^٦$ ∴ $\sqrt{س^٤} = \sqrt[٣]{س^٦}$

حاول بنفسك ٢

أكمل ما يأتى :

١ $\sqrt{١٦} + \sqrt[٣]{-٦٤} = $ ....

٢ $\sqrt{٦٤} - \sqrt[٣]{٦٤} = $ ....

٣ $\sqrt[٣]{٢٧} = \sqrt{\text{............}}$

٤ إذا كان : $\sqrt{٩} = \sqrt[٣]{س}$ فإن : س = ...

حل المعادلات فى ح باستخدام الجذر التكعيبى

• إذا كان : أ عددًا مكعبًا كاملاً فإن المعادلة : $س^٣ = أ$ لها حل وحيد فى ح هو $\sqrt[٣]{أ}$

فمثلًا : * المعادلة : $س^٣ = ٨$ لها حل وحيد فى ح هو $\sqrt[٣]{٨}$ والذى يساوى ٢

* المعادلة : $س^٣ = ٩$ ليس لها حل فى ح لأن العدد ٩ ليس مكعبًا كاملًا.

مثال ٣

حل كلًا من المعادلتين الآتيتين فى ن :

١ ٤٠ $س^٣$ − ١ = −١٣٦　　　٢ $(ص − ٢)^٣$ = −٣٤٣

الحـــل

١ ∵ ٤٠ $س^٣$ − ١ = −١٣٦　　　∴ ٤٠ $س^٣$ = −١٣٦ + ١

∴ ٤٠ $س^٣$ = −١٣٥　　　∴ $س^٣ = \frac{-١٣٥}{٤٠}$

∴ $س^٣ = \frac{-٢٧}{٨}$　　　∴ $س = \sqrt[٣]{\frac{-٢٧}{٨}}$　　　∴ $س = \frac{-٣}{٢}$

٢ ∵ $(ص − ٢)^٣$ = −٣٤٣ وبأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ $\sqrt[٣]{(ص − ٢)^٣} = \sqrt[٣]{-٣٤٣}$　　　∴ ص − ٢ = −٧

∴ ص = −٧ + ٢　　　∴ ص = −٥

حاول بنفسك ٣

أوجد فى ن مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ ٢٧ $س^٣$ − ٢ = ٦٢　　　٢ $(٥ س − ٣)^٣$ − ٢ = ٦

تطبيقات على الجذر التكعيبى لعدد نسبى

تذكر أن	فمثلًا
إذا كان مكعب طول حرفه ل سم فإن :	إذا كان حجم مكعب ٨ $سم^٣$ فإن :
• حجم المكعب = $ل^٣$ $سم^٣$	• طول حرفه = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ سم
• مساحة الوجه الواحد للمكعب = $ل^٢$ $سم^٢$	• مساحة وجهه = $٢^٢$ = ٤ $سم^٢$
• المساحة الجانبية للمكعب = ٤ $ل^٢$ $سم^٢$	• مساحته الجانبية = ٤ × $٢^٢$ = ١٦ $سم^٢$
• المساحة الكلية للمكعب = ٦ $ل^٢$ $سم^٢$	• مساحته الكلية = ٦ × $٢^٢$ = ٢٤ $سم^٢$

مثال ٤

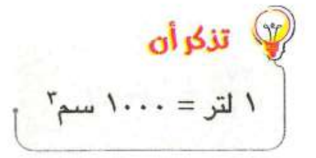
١ أوجد طول الحرف الداخلى بالسنتيمتر لإناء مكعب الشكل سعته ٨ لتر.

٢ أوجد طول نصف قطر كرة حجمها $\frac{٣٦}{١٢٥}$ π سم^٣ (**علمًا بأن** : حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣).

حيث : نق طول نصف قطر الكرة ، π النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

٣ أوجد طول قطر كرة حجمها ٣٨٨٠.٨ سم^٣ (π ≈ $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل



١ ∵ سعة الإناء = ٨ لتر = ٨ × ١٠٠٠ = ٨٠٠٠ سم^٣

∴ طول حرف الإناء الداخلى = $\sqrt[٣]{٨٠٠٠}$ = ٢٠ سم

٢ ∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣ = $\frac{٣٦}{١٢٥}$ π

∴ $\frac{٤}{٣}$ نق^٣ = $\frac{٣٦}{١٢٥}$

∴ نق^٣ = $\frac{٣٦}{١٢٥}$ × $\frac{٣}{٤}$

∴ نق^٣ = $\frac{٢٧}{١٢٥}$

∴ نق = $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{١٢٥}}$ = $\frac{٣}{٥}$ سم

∴ طول نصف قطر الكرة = $\frac{٣}{٥}$ سم

٣ ∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣ = ٣٨٨٠.٨

∴ $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق^٣ = ٣٨٨٠.٨

∴ $\frac{٨٨}{٢١}$ نق^٣ = ٣٨٨٠.٨

∴ نق^٣ = ٣٨٨٠.٨ × $\frac{٢١}{٨٨}$

∴ نق^٣ = ٩٢٦١

∴ نق = $\sqrt[٣]{٩٢٦١}$

∴ نق = ٣ × ٧ = ٢١ سم

٩٢٦١	٣
٣٠٨٧	٣
١٠٢٩	٣
٣٤٣	٧
٤٩	٧
٧	٧
١	

(٣) (٧)

∴ طول قطر الكرة = ٢١ × ٢ = ٤٢ سم

لاحظ أنه : يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد $\sqrt[٣]{٩٢٦١}$ مباشرة.

حاول بنفسك ٤

١ أوجد طول الحرف الداخلى لإناء على شكل مكعب سعته ٢٧ لترًا.

٢ أوجد طول قطر كرة حجمها ٣٦ π سم^٣ (علمًا بأن : حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣)





اختبـــار تفاعلى

تماريـن 1 على الجذر التكعيبى للعدد النسبى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل :

[١] $\sqrt[٣]{٨} =$ ....

[٢] $\sqrt[٣]{-٢٧} =$ ....

[٣] $\sqrt[٣]{٢١٦} =$ ....

[٤] $\sqrt[٣]{-٣٤٣} =$ ....

[٥] $\sqrt[٣]{٠,٠٠١} =$ ....

[٦] $\sqrt[٣]{\frac{-٨}{٢٧}} =$ ....

[٧] 📖 $\sqrt[٣]{٨} + \sqrt[٣]{-٨} =$ ....

[٨] 📖 $\sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{٦٤} =$ ....

[٩] $\sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{-٢٧} =$ ....

[١٠] 📖 $\sqrt{٩} + \sqrt[٣]{-٨} =$ ....

[١١] $-\sqrt[٣]{-١} - \sqrt{١} =$ ....

[١٢] 📖 $\sqrt[٣]{أ^{٣}} =$ ....

[١٣] $\sqrt[٣]{-٢٧\ أ^{٦}} =$ ....

[١٤] $\sqrt[٣]{............} = ٤$

[١٥] $\sqrt[٣]{............} = -١٠$

[١٦] $\sqrt{١٦} = \sqrt[٣]{............}$

[١٧] 📖 $|\sqrt[٣]{-١٢٥}| = \sqrt{............}$

[١٨] $\sqrt[٣]{٦٤ + ...} = ٥$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] 📖 $\sqrt[٣]{(-٨)^{٢}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

[٢] 📖 $\sqrt{٢٥} - \sqrt[٣]{-١٢٥} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ± ٥

[٣] $\sqrt{(-٢)^{٢}} + \sqrt[٣]{(-٢)^{٣}} =$ ....

(أ) −٤ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) صفر

[٤] $\sqrt[3]{1000} \times \sqrt[3]{-0.008}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١٠ (جـ) ٢ (د) −٢

[٥] $\sqrt[3]{-27} + \sqrt{12\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{0.125}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) $\frac{11}{2}$

[٦] إذا كان : $-\sqrt{25} = \sqrt[3]{ص}$ فإن : ص = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ١٢٥ (د) −١٢٥

[٧] إذا كان : $س^2 = 64$ فإن : $\sqrt{س}$ = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) −٢

[٨] إذا كان : $س^3 = 27$ فإن : $س^2$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٨١

[٩] $\sqrt[3]{س^6} = \sqrt{............}$

(أ) $س^3$ (ب) $س^2$ (جـ) س (د) $س^4$

[١٠] إذا كان : $\frac{س}{3} = \frac{9}{س^2}$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٢٧

٣ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

[١] $\sqrt[3]{س} = 5$

[٢] $\sqrt[3]{س} = -\frac{1}{4}$

[٣] $\sqrt[3]{س} = -\sqrt{4}$

[٤] $\sqrt[3]{س} - 3 = -1$

[٥] $س^3 = -8$

[٦] $س^3 = 64$

[٧] $س^3 + 5 = 32$

[٨] $2 س^3 = 54$

[٩] $\frac{1}{5} س^3 = -200$

٤ **أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ن :**

[١] $س^{٣} + ٢٧ = ٠$ [٢] $٨ س^{٣} + ٧ = ٨$

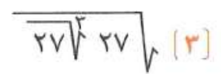
[٣] $٢ س^{٣} - ٥ = س^{٣} + ٣$ [٤] $(س + ٣)^{٣} = ٣٤٣$

[٥] $(٢ س + ١)^{٣} - ٧ = ٢٠$ [٦] $(٥ س - ٢)^{٣} + ١٠ = ١٨$

---

٥ **أوجد كلًا مما يأتى :**

[١] $-\sqrt[٣]{٢^{٩} \times ٣^{٦}}$ [٢] $\sqrt{\sqrt[٣]{٧٢٩}}$ [٣] $\sqrt{٢٧ \sqrt[٣]{٢٧}}$



تطبيقات

٦ مكعب حجمه ٢٧ سم^{٣} ، **أوجد :**

[١] مساحة أحد أوجهه. [٢] مساحته الكلية. «٩ سم^{٢} ، ٥٤ سم^{٢}»

---

٧ إناء مكعب سعته لتر واحد. احسب طول حرفه الداخلى. «١٠ سم»

---

٨ كرة حجمها $\frac{١٣٧٢}{٨١} \pi$ وحدة مكعبة فأوجد طول قطرها (حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣})

« $\frac{١٤}{٣}$ وحدة طول»

---

٩ أوجد طول قطر الكرة التى حجمها ١١٣,٠٤ سم^{٣} (π = ٣,١٤) «٦ سم»

للمتفوقين

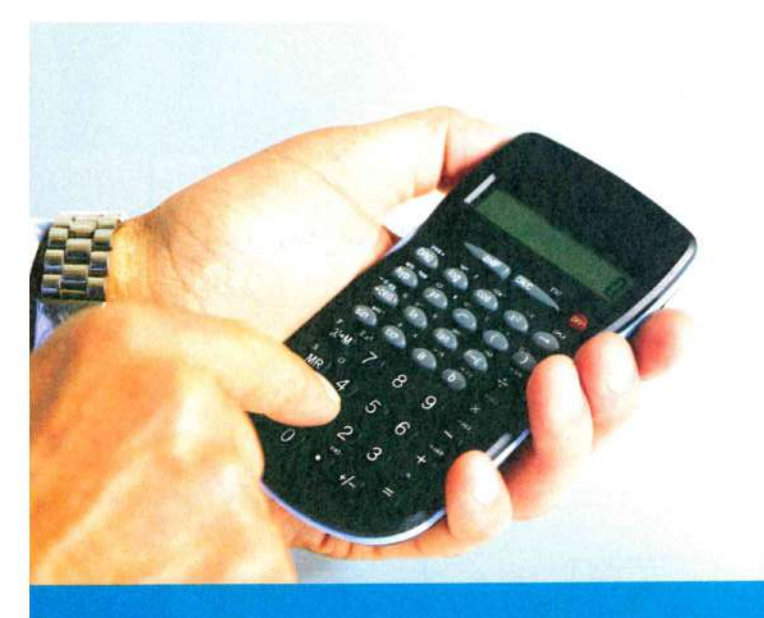
١٠ **أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ن :**

[١] $(س^{٢} + ٦)^{٣} = ١٠٠٠$ [٢] $(س^{٣} - ١٤)^{٢} = ١٦٩$

[٣] $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}} = \sqrt[٣]{٢٥}$

---

١١ إذا كان : $\sqrt[٣]{\sqrt{س} + ١٩} = ٣$ **فأوجد قيمة :** $\sqrt[٣]{س}$ «٤»



الدرس 2

مجموعة الأعداد غير النسبية ($\bar{ن}$)

تذكر مجموعات الأعداد

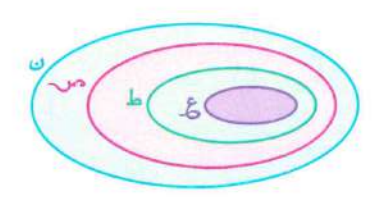
درست فيما سبق مجموعات الأعداد الآتية :

- مجموعة أعداد العد : ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...}
- مجموعة الأعداد الطبيعية : ط = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...} = ع ∪ {٠}
- مجموعة الأعداد الصحيحة : ص = {... ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، −١ ، −٢ ، −٣ ، ...}
- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة : $ص_+$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...} = ع
- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة : $ص_-$ = {−١ ، −٢ ، −٣ ، ...}
- مجموعة الأعداد النسبية : ن = {$\frac{أ}{ب}$: أ ∈ ص ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠}

أمثلة لأعداد نسبية : $\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، صفر ، ٣ ، −٥ ، ٠,٢ ، ٢٥٪ ، $\sqrt{٣٦}$ ، $\sqrt[٣]{-٦٤}$ ، ...

لاحظ أن : ع ⊂ ط ⊂ ص ⊂ ن

والشكل المقابل يوضح ذلك.



الأعداد غير النسبية

الجذر التربيعى للعدد النسبى الذى هو ليس مربعًا كاملاً هو عدد غير نسبى

فمثلًا :

$\sqrt{2} \notin$ ن لأنه لا يمكن إيجاد عدد نسبى مربعه يساوى ٢

وبالتالى : $\sqrt{2}$ لا يمكن كتابته على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب ≠ ٠

العدد π هو عدد غير نسبى

(على الرغم من أن : $\frac{22}{7}$ ، ٣,١٤ ، ٣,١٤٢ أعداد نسبية وكل منها يمثل قيمة تقريبية للعدد غير النسبى π)

الجذر التكعيبى للعدد النسبى الذى هو ليس مكعبًا كاملاً هو عدد غير نسبى

فمثلًا :

$\sqrt[3]{4} \notin$ ن لأنه لا يمكن إيجاد عدد نسبى مكعبه يساوى ٤

وبالتالى $\sqrt[3]{4}$ لا يمكن كتابته على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددين صحيحين ، ب ≠ ٠

أمثلة أخرى لأعداد غير نسبية

$\sqrt{5}+1$ ، $1-\sqrt[3]{7}$ ، $2\sqrt[3]{7}$ ، $-\frac{\sqrt[3]{9}}{5}$

مجموعة الأعداد غير النسبية يُرمز لها بالرمز ن َ

مع ملاحظة أن : ن ، ن َ مجموعتان منفصلتان أى أن : ن ∩ ن َ = ∅

ملاحظة

- $(\sqrt{أ})^2 = \sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = أ$ حيث أ ≥ ٠

  فمثلاً : $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

- $(\sqrt[3]{أ})^3 = \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{أ} = أ$ حيث أ ∈ ن

  فمثلاً : $(\sqrt[3]{-7})^3 = \sqrt[3]{-7} \times \sqrt[3]{-7} \times \sqrt[3]{-7} = -7$

مثال ١

بيِّن أى الأعداد الآتية ينتمى إلى ن وأيها ينتمى إلى نَ :

١ $\sqrt{٠,٤٩}$ ٢ $\sqrt[٣]{-٠,٠٦٤}$ ٣ $\sqrt{\frac{٢٥}{٤٩}}$

٤ $\sqrt[٣]{\frac{٢٥}{٤٩}}$ ٥ $\sqrt{٢٥} + \sqrt[٣]{١٦}$

الحل

١ $\because \sqrt{٠,٤٩} = ٠,٧ = \frac{٧}{١٠}$ $\therefore \sqrt{٠,٤٩} \in$ ن

٢ $\because \sqrt[٣]{-٠,٠٦٤} = -٠,٤ = -\frac{٤}{١٠}$ $\therefore \sqrt[٣]{-٠,٠٦٤} \in$ ن

٣ $\because \sqrt{\frac{٢٥}{٤٩}} = \sqrt{\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢}} = \frac{٥}{٧}$ $\therefore \sqrt{\frac{٢٥}{٤٩}} \in$ ن

٤ $\because \sqrt[٣]{\frac{٢٥}{٤٩}} \notin$ ن لأنه لا يوجد عدد نسبى مكعبه يساوى $\frac{٢٥}{٤٩}$ $\therefore \sqrt[٣]{\frac{٢٥}{٤٩}} \in$ نَ

٥ $\because \sqrt{٢٥} + \sqrt[٣]{١٦} = ٥ + \sqrt[٣]{١٦}$

، $\because$ لا يوجد عدد نسبى مكعبه = ١٦ $\therefore \sqrt[٣]{١٦} \notin$ ن

$\therefore (٥ + \sqrt[٣]{١٦}) \notin$ ن $\therefore (\sqrt{٢٥} + \sqrt[٣]{١٦}) \in$ نَ

حاول بنفسك ١

أكمل باستخدام أحد الرمزين ن أ، نَ :

١ $٣ \in$ .... ٢ $\sqrt{٣} \in$ ....

٣ $\sqrt{٩} \in$ .... ٤ $\sqrt[٣]{-٨} \in$ ....

٥ $\sqrt[٣]{٥} \in$ .... ٦ $\sqrt[٣]{-٩} \in$ ....

حل المعادلات فى ن̄

مثال ٢

إذا كانت س ∈ ن̄ فأوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

١ $س^٢ - ٢ = ٣$

٢ $\frac{١}{٢} س^٣ = ٢$

٣ $٦٤ س^٣ - ٢ = -٢٩$

٤ $(س^٢ - ١٠) (س^٣ - ٤) =$ صفر

الحل

١ ∵ $س^٢ - ٢ = ٣$ ∴ $س^٢ = ٣ + ٢$

∴ $س^٢ = ٥$ ∴ $س = \pm \sqrt{٥}$

∴ مجموعة الحل = $\{ \sqrt{٥} ، -\sqrt{٥} \}$

لاحظ أننا

استخدمنا مفهوم الجذر التربيعى فى إيجاد قيمة س طبقًا للملاحظة الآتية :

إذا كان : $س^٢ = أ$ فإن : $س = \pm \sqrt{أ}$

٢ ∵ $\frac{١}{٢} س^٣ = ٢$ ∴ $س^٣ = ٢ \times ٢$ ∴ $س^٣ = ٤$

∴ $س = \sqrt[٣]{٤}$ ∴ مجموعة الحل = $\{ \sqrt[٣]{٤} \}$

٣ ∵ $٦٤ س^٣ - ٢ = -٢٩$ ∴ $٦٤ س^٣ = -٢٩ + ٢$ ∴ $٦٤ س^٣ = -٢٧$

∴ $س^٣ = -\frac{٢٧}{٦٤}$ ∴ $س = \sqrt[٣]{-\frac{٢٧}{٦٤}}$ ∴ $س = -\frac{٣}{٤}$

، ∵ $-\frac{٣}{٤} \in ن$ ∴ $-\frac{٣}{٤} \notin ن̄$ ∴ مجموعة الحل = $\varnothing$

٤ ∵ $(س^٢ - ١٠) (س^٣ - ٤) = ٠$

∴ إما $س^٢ - ١٠ = ٠$ ، أو $س^٣ - ٤ = ٠$

∴ $س^٢ = ١٠$ | ∴ $س^٣ = ٤$

∴ $س = \pm \sqrt{١٠}$ | ∴ $س = \sqrt[٣]{٤}$

∴ مجموعة الحل = $\{ \sqrt{١٠} ، -\sqrt{١٠} ، \sqrt[٣]{٤} \}$

لاحظ أنه

لأى عددين س ، ص :

إذا كان : س ص = صفر

فإنه : إما س = صفر أو ص = صفر

حاول بنفسك ٢

أوجد مجموعة الحل فى ن̄ لكل مما يأتى :

١ $٢ س^٣ - ٧ = ٣$

٢ $\frac{١}{٢} س^٢ - ٥ = ٣$

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

• إذا استخدمنا الآلة الحاسبة لإيجاد قيم بعض الأعداد غير النسبية فسنجد أن :

$\sqrt{٢} \approx ١,٤١٤٢...$ ، $\sqrt{٣} \approx ١,٧٣٢٠٥...$ ، $\sqrt{٥} \approx ٢,٢٣٦...$

أى أن : **العدد غير النسبى يمثل بعدد عشرى غير منته وغير دائر**

ويمكن استنتاج قيمة تقريبية للعدد غير النسبى بدون استخدام الآلة الحاسبة.

فمثلًا : **يمكن إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى $\sqrt{٥}$ كما يلى :**

∵ ٤ < ٥ < ٩ (لاحظ أننا اخترنا ٤ ، ٩ لأن كلًا منهما مربع كامل ، والعدد ٥ ينحصر بينهما)

وبأخذ الجذر التربيعى لجميع الأطراف.

∴ $\sqrt{٤} < \sqrt{٥} < \sqrt{٩}$ ∴ $٢ < \sqrt{٥} < ٣$

أى أن : $\sqrt{٥}$ = ٢ + كسر أقل من الواحد الصحيح

ولإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٥}$ نفحص قيم الأعداد التالية : $(٢,١)^٢$ ، $(٢,٢)^٢$ ، $(٢,٣)^٢$

فنجد أن : $(٢,١)^٢ = ٤,٤١$ ، $(٢,٢)^٢ = ٤,٨٤$ ، $(٢,٣)^٢ = ٥,٢٩$

، ∵ ٤,٨٤ < ٥ < ٥,٢٩ ∴ $\sqrt{٤,٨٤} < \sqrt{٥} < \sqrt{٥,٢٩}$

∴ $٢,٢ < \sqrt{٥} < ٢,٣$

يمكن القول إن : ٢,٢ ، ٢,٣ تعتبر قيم تقريبية للعدد $\sqrt{٥}$

وهكذا يمكن إيجاد قيم أدق للعدد غير النسبى $\sqrt{٥}$

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة لتأكيد صحة القيمة التقريبية للعدد $\sqrt{٥}$

ملاحظة

كل عدد غير نسبى تقع قيمته بين عددين نسبيين.

مثال ٣

أثبت أن : ١ $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨ ٢ $\sqrt[٣]{١٢}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

الحـــل

١ ∵ $(\sqrt{٣})^٢ = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$ ، $(١,٧)^٢ = ٢,٨٩$ ، $(١,٨)^٢ = ٣,٢٤$

، ∵ $٣,٢٤ > ٣ > ٢,٨٩$ ∴ $\sqrt{٣,٢٤} > \sqrt{٣} > \sqrt{٢,٨٩}$

∴ $١,٨ > \sqrt{٣} > ١,٧$ أى أن : $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨

ويمكن الحل باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

∵ $\sqrt{٣} \approx ١,٧٣$ ، ∵ $١,٨ > ١,٧٣ > ١,٧$

∴ $١,٨ > \sqrt{٣} > ١,٧$ ∴ $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨

٢ ∵ $(\sqrt[٣]{١٢})^٣ = \sqrt[٣]{١٢} \times \sqrt[٣]{١٢} \times \sqrt[٣]{١٢} = ١٢$

، $(٢,٢)^٣ = ١٠,٦٤٨$ ، $(٢,٣)^٣ = ١٢,١٦٧$

، ∵ $١٢,١٦٧ > ١٢ > ١٠,٦٤٨$ ∴ $\sqrt[٣]{١٢,١٦٧} > \sqrt[٣]{١٢} > \sqrt[٣]{١٠,٦٤٨}$

∴ $٢,٣ > \sqrt[٣]{١٢} > ٢,٢$ أى أن : $\sqrt[٣]{١٢}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

ويمكن الحل باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

∵ $\sqrt[٣]{١٢} \approx ٢,٢٨٩$ ، ∵ $٢,٣ > ٢,٢٨٩ > ٢,٢$

∴ $٢,٣ > \sqrt[٣]{١٢} > ٢,٢$ ∴ $\sqrt[٣]{١٢}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

حاول بنفسك ٣

١ أوجد عددين صحيحين متتالين ينحصر بينهما $\sqrt{١٣}$

٢ أثبت أن $\sqrt{٧}$ ينحصر بين ٢,٦ ، ٢,٧

تمثيل العدد غير النسبى على خط الأعداد

• إذا رسمنا المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب بحيث يكون :

أ ب = ١ سم ، ب حـ = ٢ سم

فحسب نظرية فيثاغورس يكون :

(أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

= (١)^{٢} + (٢)^{٢} = ١ + ٤ = ٥

∴ أ حـ = $\sqrt{٥}$ سم

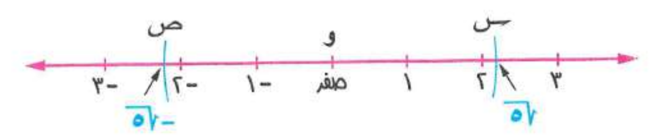
أى أن : طول $\overline{\text{أ حـ}}$ يمثل العدد غير النسبى $\sqrt{٥}$



• فإذا رسمنا خط الأعداد بحيث تكون المسافة بين كل عددين متتاليين ١ سم ، وفتحنا الفرجار فتحة مساوية لطول $\overline{\text{أ حـ}}$

ثم ركزنا فى نقطة و التى تمثل العدد صفر ورسمنا قوسًا يقطع خط الأعداد فى النقطة س على يمين النقطة و

فإن النقطة س تمثل العدد $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد.



• وبنفس الفتحة إذا ركزنا بالفرجار فى النقطة و ورسمنا قوسًا يقطع خط الأعداد فى النقطة ص فإن النقطة ص تمثل العدد − $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد.

وبصفة عامة

كل عدد غير نسبى يمكن تمثيله بنقطة على خط الأعداد.

طريقة تمثيل العدد غير النسبى على خط الأعداد

لتمثيل العدد $\sqrt{أ}$ (حيث أ > ١) على خط الأعداد

، فإننا نوجد طولى الضلعين اللذين يمثلان الوتر

وأحد ضلعى القائمة لمثلث قائم الزاوية ونرسم هذا

المثلث على خط الأعداد حيث :

($\frac{أ-١}{٢}$) سم ($\frac{أ+١}{٢}$) سم صفر ($\sqrt{أ}$) سم $\sqrt{أ}$

- $\frac{أ + ١}{٢}$ يمثل طول وتر المثلث
- $\frac{أ - ١}{٢}$ يمثل طول أحد ضلعى القائمة المرسوم عموديًا على خط الأعداد عند النقطة التى تمثل العدد صفر فتكون نقطة تقاطع الوتر مع خط الأعداد هى النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{أ}$

مثال ٤

عين على خط الأعداد النقطة التى تمثل كلًا من الأعداد الآتية :

١ $\sqrt{٧}$	**٢** $-\sqrt{٧}$	**٣** $١ + \sqrt{٧}$
٤ $٢ - \sqrt{٧}$	**٥** $٢\sqrt{٧}$	

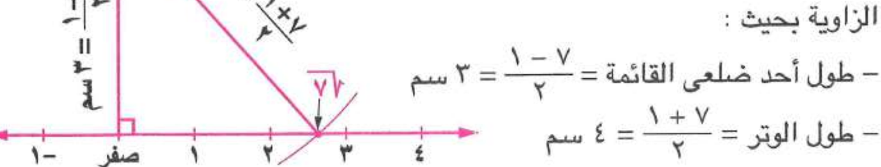
الحل

١ **لتعيين النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد اتبع الخطوات التالية :**

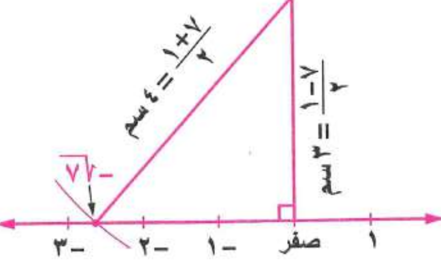
- ارسم خط الأعداد بحيث تكون المسافة بين كل عددين متتالين ١ سم ، وارسم عليه مثلثًا قائم الزاوية بحيث :

– طول أحد ضلعى القائمة = $\frac{٧ - ١}{٢}$ = ٣ سم

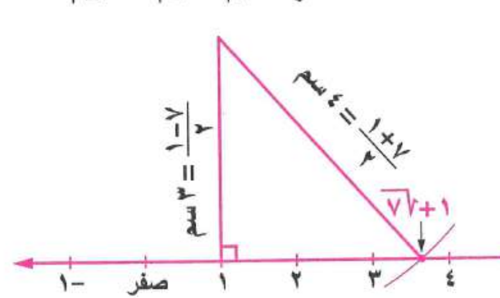
– طول الوتر = $\frac{٧ + ١}{٢}$ = ٤ سم



- من النقطة التى تمثل العدد صفر ارسم ضلع القائمة الذى طوله ٣ سم عموديًا على خط الأعداد.
- باستخدام الفرجار وبفتحة مساوية لطول الوتر ٤ سم اركز فى أعلى نقطة لضلع القائمة وارسم قوسًا يقطع خط الأعداد على يمين النقطة التى تمثل العدد صفر (لأن : $\sqrt{٧}$ عدد موجب)
- فتكون نقطة تقاطع القوس مع خط الأعداد هى النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{٧}$

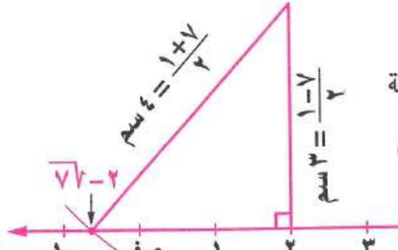


٢ لتمثيل العدد $-\sqrt{٧}$ على خط الأعداد نتبع نفس الخطوات ولكن نرسم القوس من جهة اليسار (لأن : $-\sqrt{٧}$ عدد سالب)

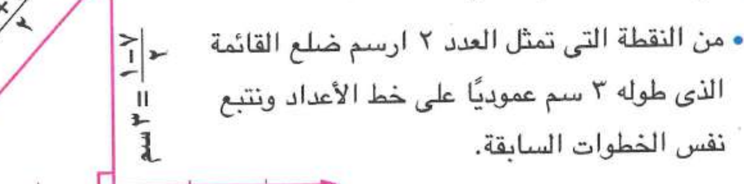


٣ لتمثيل العدد ١ + $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد

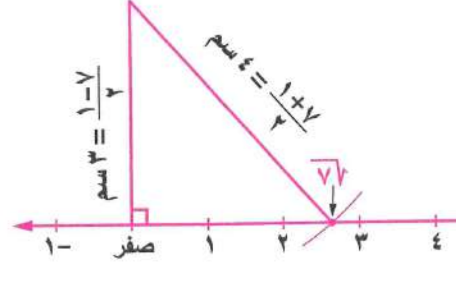
- من النقطة التى تمثل العدد ١ ارسم ضلع القائمة الذى طوله ٣ سم عموديًا على خط الأعداد ونتبع نفس الخطوات السابقة.



٤ لتمثيل العدد ٢ − $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد



- من النقطة التى تمثل العدد ٢ ارسم ضلع القائمة الذى طوله ٣ سم عموديًا على خط الأعداد ونتبع نفس الخطوات السابقة.



٥ لتمثيل العدد ٢ $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد

نتبع الخطوات السابقة لتمثيل العدد $\sqrt{٧}$ وباستخدام الفرجار وبفتحة لتساوى المسافة بين صفر، $\sqrt{٧}$ نركز عند النقطة التى ونرسم قوسًا يقطع خط الأعداد وتكون نقطة التقاطع هى الممثلة للعدد ٢ $\sqrt{٧}$

حاول بنفسك ٤

عين على خط الأعداد النقطة التى تمثل كلًا من الأعداد الآتية :

١ $\sqrt{١٠}$ **٢** $-\sqrt{١٠}$ **٣** ٢ + $\sqrt{١٠}$ **٤** ٣ − $\sqrt{١٠}$



تمارين

على مجموعة الأعداد غير النسبية (نَ)



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ في كل مما يأتى بيِّن نوع كل عدد من حيث كونه نسبيًا أم غير نسبى :

[١] -٥	[٢] $٢\frac{٢}{٣}$	[٣] $٢,٠٦$	[٤] $٢,٣ \times ١٠^{٥}$
[٥] $-\sqrt{٣٦}$	[٦] $\sqrt[٣]{٣٦}$	[٧] $\sqrt{٧}$	[٨] صفر
[٩] $\lvert -٥ \rvert$	[١٠] $\sqrt[٣]{-\frac{٦٤}{٨١}}$	[١١] $\sqrt{\frac{٢٥}{١٦}}$	[١٢] $\sqrt{\frac{١}{٣}}$
[١٣] $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}}$	[١٤] $\sqrt[٣]{٠,٣٤٣}$	[١٥] $\frac{\pi}{٢}$	[١٦] $(-٥)^{\text{صفر}}$
[١٧] $\frac{\text{صفر}}{٣}$	[١٨] $\frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٤}}$	[١٩] $\sqrt{٩} + \sqrt{١٦}$	[٢٠] $\sqrt{٤} - \sqrt{١١}$

٢ أوجد قيمة تقريبية لكل من الأعداد الآتية :

[١] $\sqrt{١١}$ لأقرب جزء من مائة.

[٢] $\sqrt[٣]{٧}$ لأقرب جزء من عشرة.

[٣] $\sqrt[٣]{-٩}$ لأقرب جزء من عشرة.

٣ أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما كل مما يأتى :

[١] $\sqrt{٥}$ [٢] $\sqrt{١٢}$ [٣] $\sqrt[٣]{١٠}$ [٤] $\sqrt[٣]{-٢٠}$

٤ إذا كان س عددًا صحيحًا فأوجد قيمة س فى كل من الحالات الآتية :

[١] س $< \sqrt{٢} <$ س $+ ١$ «١»

[٢] 📖 س $< \sqrt{٨٠} <$ س $+ ١$ «٨»

[٣] 📖 س $< \sqrt[٣]{٥} <$ س $+ ١$ «١»

[٤] س $< \sqrt[٣]{٥٠} <$ س $+ ١$ «٣»

[٥] س $< \sqrt[٣]{-١٠٠} <$ س $+ ١$ «−٥»

[٦] س $< \lvert -\sqrt{٣٥} \rvert <$ س $+ ١$ «٥»

5 أوجد قيمة تقريبية لكل من الأعداد الآتية وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة :

[1] $\sqrt{٢٠}$ [2] $\sqrt[3]{١٧}$ [3] $\sqrt{٥} + ١$ [4] $\sqrt[3]{٩} - ١$

---

6 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] العدد غير النسبى فى الأعداد التالية هو ....

(أ) $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ (ب) $\sqrt[3]{٨}$ (جـ) $\sqrt{\frac{٤}{٩}}$ (د) $\sqrt{٢}$

[2] إذا كان : س = $\sqrt{٢}$ ، ص = ٢ فأى مما يلى لا يمثل عددًا نسبيًا ؟

(أ) $س^٢ + ص$ (ب) $س + ص^٢$ (جـ) $\sqrt{س^٢ ص}$ (د) $\sqrt{٢}$ س ص

[3] العدد غير النسبى المحصور بين ٢ ، ٣ هو ....

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) $\sqrt{٧}$ (جـ) ٢,٥ (د) $\sqrt{٣}$

[4] العدد غير النسبى المحصور بين −٢ ، −١ هو ....

(أ) −٣ (ب) $-١\frac{١}{٢}$ (جـ) $-\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٢}$

[5] $\sqrt{١٠} \approx$ ....

(أ) ٢,٩٩ (ب) ٣,٧١ (جـ) ٣ (د) −٣,٢

[6] أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt[3]{٢٥}$ هو ....

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١٢,٥

[7] إذا كانت : $ن \in ص_+$ ، $ن < \sqrt{٢٦} < ن + ١$ فإن : ن = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) ٢٤

[8] طول ضلع مربع مساحته ٦ سم^٢ هو عدد ....

(أ) طبيعى. (ب) صحيح. (جـ) نسبى. (د) غير نسبى.

[9] المربع الذى طول ضلعه $\sqrt{٣}$ سم تكون مساحته .... سم^٢

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٩ (جـ) ٣ (د) ٦

[١٠] المربع الذى مساحته ١٠ سم^٢ يكون طول ضلعه .... سم

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) $\sqrt{١٠}$ (د) $-\sqrt{١٠}$

[١١] مجموعة حل المعادلة : (س − $\sqrt{٥}$) (س + $\sqrt{٣}$) = صفر فى نَ هى ....

(أ) {$\sqrt{٥}$} (ب) {$-\sqrt{٣}$}

(جـ) {$-\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٣}$} (د) {$\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٣}$}

---

٧ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى وبيِّن ما إذا كانت س ∈ ن أم س ∈ نَ :

[١] ٥ س^٢ = ١٠ «± $\sqrt{٢}$»

[٢] ٤ س^٢ = ٩ «± $\frac{٣}{٢}$»

[٣] س^٣ = ١٢٥ «٥»

[٤] ٣ س^٣ = ٢٧ «$\sqrt[٣]{٩}$»

[٥] ٠,١ س^٢ = ١٠ «± ١٠»

[٦] ٠,٠٠١ س^٣ = −٨ «−٢٠»

[٧] (س − ١)^٢ = ٤ «٣ أ ، −١»

[٨] (س − ٥)^٣ = ١ «٦»

---

٨ أوجد فى نَ مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] $\frac{٢}{٥}$ س^٢ = $\frac{٢٥}{٢}$

[٢] $\frac{٥}{٤}$ س^٣ = −٢

[٣] ١٢٥ س^٣ − ٧ = ٢٠

[٤] $\frac{١}{٤}$ س^٢ + ٢ = ٦٦

[٥] (س^٢ + ٥) (س^٢ − ٣) = صفر

[٦] (س + $\sqrt{٧}$) (س^٣ − ٦) = صفر

---

٩ أثبت أن :

[١] $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥

[٢] $\sqrt{١١}$ ينحصر بين ٣,٣١ ، ٣,٣٢

[٣] $\sqrt[٣]{٢}$ ينحصر بين ١,٢ ، ١,٣

[٤] $\sqrt[٣]{١٥}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥

[٥] $\sqrt[٣]{-١٧}$ ينحصر بين −٢,٦ ، −٢,٥

[٦] $\sqrt{٣}$ + ١ ينحصر بين ٢,٧ ، ٢,٨

١٠ عين النقطة التى تمثل كلاً من الأعداد الآتية على خط الأعداد :

[١] $\sqrt{٣}$ | [٢] $-\sqrt{١١}$ | [٣] $\sqrt{١٠}$

[٤] $\sqrt{٥} + ١$ | [٥] $١ - \sqrt{٧}$ | [٦] $٢\sqrt{٥}$

---

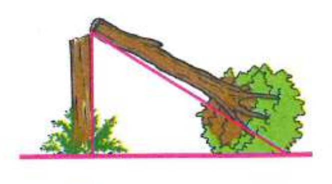
١١ ارسم خط الأعداد وحدد عليه النقطة أ التى تمثل العدد $\sqrt{٢}$ والنقطة ب التى تمثل العدد $١ + \sqrt{٢}$ والنقطة حـ التى تمثل العدد $١ - \sqrt{٢}$

---

١٢ احسب طول ضلع وطول قطر المربع الذى مساحته ١٠ سم^{٢} «$\sqrt{١٠}$ سم ، $\sqrt{٢٠}$ سم»

تطبيقات

١٣ بسبب الرياح كُسِر الجزء العلوى من شجرة طولها ٣ أمتار فصنع مع سطح الأرض زاوية ما ، فإذا كان طول الجزء الثابت فوق الأرض من الشجرة ١ متر فأوجد المسافة بين قاعدة الشجرة ونقطة تلاقى قمتها مع الأرض.



«$\sqrt{٣}$ متر»



للمتفوقين

١٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ينحصر بين ٣ ، ٤



الدرس 3 مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) - علاقة الترتيب فى ح

مجموعة الأعداد الحقيقية

هى المجموعة الناتجة من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز ح

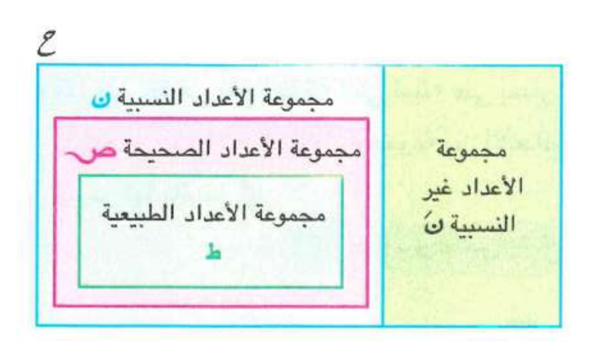
أى أن : $\text{ح} = \text{ن} \cup \text{نَ}$ (كما بالشكل المقابل)

، مع ملاحظة أن : $\text{ن} \cap \text{نَ} = \varnothing$

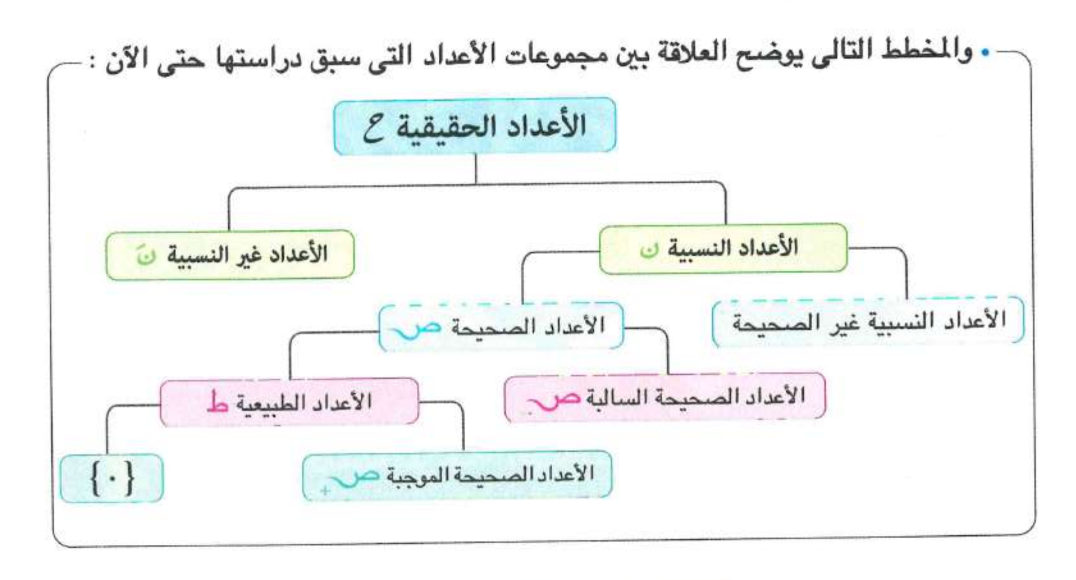
• وشكل فن المقابل يوضح أن :

$\text{ط} \subset \text{ص} \subset \text{ن} \subset \text{ح}$

، $\text{نَ} \subset \text{ح}$



• والمخطط التالى يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد التى سبق دراستها حتى الآن :



علاقة الترتيب فى (ح)

• كل عدد حقيقى تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد.

• مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة مرتبة.

• إذا كانت النقطة التى تمثل العدد س تقع على يسار النقطة التى تمثل العدد ص

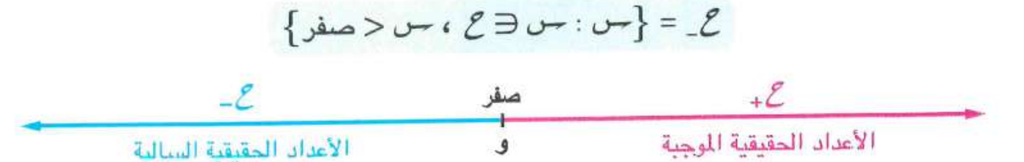
كما بالشكل المقابل فإن : س < ص أ، ص > س

• كل عدد حقيقى تقع النقطة التى تمثله على يمين نقطة الأصل (و) يكون أكبر من الصفر ، وجميع هذه الأعداد تكوِّن مجموعة من الأعداد تُسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ويرمز لها بالرمز $ح_+$

$$ح_+ = \{س : س \in ح ، س > صفر\}$$

• كل عدد حقيقى تقع النقطة التى تمثله على يسار نقطة الأصل (و) يكون أصغر من الصفر ، وجميع هذه الأعداد تكوِّن مجموعة من الأعداد تُسمى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة ويرمز لها بالرمز $ح_-$

$$ح_- = \{س : س \in ح ، س < صفر\}$$



ملاحظات

- $ح_+ \cap ح_- = \emptyset$
- $ح = ح_+ \cup \{٠\} \cup ح_-$
- العدد «صفر» ليس موجبًا وليس سالبًا.
- $ح_+ \cup \{٠\} = \{س : س \in ح ، س \geq ٠\}$ وتسمى مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة.
- $ح_- \cup \{٠\} = \{س : س \in ح ، س \leq ٠\}$ وتسمى مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة.
- يرمز للأعداد الحقيقية بدون الصفر بالرمز $ح^*$

أى أن : $ح^* = ح - \{٠\} = ح_+ \cup ح_-$

مثال ١

رتب تصاعديًا الأعداد الآتية : $\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، -٨ ، ٧ ، $-\sqrt{٣٢}$

الحــل

- **نرتب أولاً الأعداد الموجبة وهى :** $\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، ٧

$\because ٧ = \sqrt{٤٩}$ ، $\because ٤٩ < ٦٨ < ٧٥$ $\quad \therefore \sqrt{٤٩} < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$

أى أن : $٧ < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$

- **ثم نرتب الأعداد السالبة وهى :** $-\sqrt{٤٥}$ ، -٨ ، $-\sqrt{٣٢}$

$\because ٨ = \sqrt{٦٤}$ ، $\because ٦٤ > ٤٥ > ٣٢$

$\therefore \sqrt{٦٤} > \sqrt{٤٥} > \sqrt{٣٢}$ $\quad \therefore -\sqrt{٦٤} < -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢}$

أى أن : $-٨ < -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢}$

$\therefore$ **الترتيب التصاعدى هو :** -٨ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $-\sqrt{٣٢}$ ، ٧ ، $\sqrt{٦٨}$ ، $\sqrt{٧٥}$

ملاحظة

يمكن الحل باستخدام الآلة الحاسبة عن طريق إيجاد قيم تقريبية للجذور.

حاول بنفسك ١

أكمل كلًّا مما يأتى باستخدام إحدى العلامتين > أ، < :

١) $\sqrt{٢}$ .... ١ | ٢) $-\sqrt{٣}$ .... -١ | ٣) $\sqrt[٣]{٩}$ ٣

٤) $-\sqrt[٣]{٧}$ .... -٢ | ٥) $\sqrt{٧}$ .... ٢,٦ | ٦) $-\sqrt[٣]{١٦}$ .... $-٢,٥٢$

مثال ٢

اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية محصورة بين العددين ١١ ، ١٢

الحـــل

$\because (١١)^٢ = ١٢١ \quad ، \quad (١٢)^٢ = ١٤٤$

$\therefore$ ١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٣٠ ثلاثة أعداد صحيحة تنحصر بين ١٢١ ، ١٤٤

$\therefore ١٢١ < ١٢٥ < ١٢٦ < ١٣٠ < ١٤٤$

$\therefore \sqrt{١٢١} < \sqrt{١٢٥} < \sqrt{١٢٦} < \sqrt{١٣٠} < \sqrt{١٤٤}$

لاحظ أنه

توجد أعداد غير نسبية أخرى تنحصر بين ١١ ، ١٢

$\therefore$ **الأعداد غير النسبية المطلوبة هى :** $\sqrt{١٢٥}$ ، $\sqrt{١٢٦}$ ، $\sqrt{١٣٠}$

حاول بنفسك ٢

اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية تنحصر بين العددين ٧ ، ٨

مثال ٣

أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

١) $٣ س^٢ + ١٢٥ = ٢٢١$ ٢) $\frac{١}{٦} س^٣ - ٨ = ٢٨$ ٣) $٢ س^٢ + ٦ = ٤$

الحـــل

١ ∵ $٣ س^٢ + ١٢٥ = ٢٢١$ ∴ $٣ س^٢ = ٢٢١ - ١٢٥$ ∴ $٣ س^٢ = ٩٦$

∴ $س^٢ = \frac{٩٦}{٣}$ ∴ $س^٢ = ٣٢$ ∴ $س = \pm \sqrt{٣٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{\sqrt{٣٢} ، -\sqrt{٣٢}\}$

٢ ∵ $\frac{١}{٦} س^٣ - ٨ = ٢٨$ ∴ $\frac{١}{٦} س^٣ = ٣٦$ ∴ $س^٣ = ٣٦ \times ٦$

∴ $س^٣ = ٢١٦$ ∴ $س = \sqrt[٣]{٢١٦}$ ∴ $س = ٦$

∴ مجموعة الحل = $\{٦\}$

٣ ∵ $٢ س^٢ + ٦ = ٤$ ∴ $٢ س^٢ = ٤ - ٦$ ∴ $٢ س^٢ = -٢$

∴ $س^٢ = \frac{-٢}{٢}$ ∴ $س^٢ = -١$ ∴ $س = \pm \sqrt{-١}$

، ∵ $\sqrt{-١} \notin ح$ ، $-\sqrt{-١} \notin ح$ ∴ مجموعة الحل = $\emptyset$

حاول بنفسك ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ $٥ س^٣ + ٣ = ٢٨$ **٢** $\frac{٣}{٤} س^٢ + ٢ = -١٠$

تمارين 3

على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)
– علاقة الترتيب فى ح



اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات — أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل الجدول التالى بوضع علامة (✓) فى المكان المناسب كما فى الحالة الأولى :

العدد	عدد طبيعى	عدد صحيح	عدد نسبى	عدد غير نسبى	عدد حقيقى
-٥	✗	✓	✓	✗	✓
$\sqrt{٢}$					
$١\frac{١}{٢}$					
$\sqrt[٣]{٩}$					
$\lvert -٢ \rvert$					
$-\sqrt{٤}$					
$\frac{٥}{٢}$					
٠,٣					
$\sqrt{-١}$					

٢ ضع العلامة المناسبة (< أو > أو =) :

[١] $\sqrt{٥}$ ٢

[٢] $\sqrt{٧}$ ٢,٦

[٣] $\sqrt[٣]{٢٤}$ ٣

[٤] $\sqrt[٣]{-٢٤}$ .... -٢

[٥] $٣ - \sqrt{٥}$ .... $\sqrt[٣]{-١}$

[٦] $\sqrt[٣]{٨}$ .... $\sqrt{٤}$

[٧] $\sqrt[٣]{٣} - ١$ ٠,٢

[٨] $\sqrt{٢} - ١$ .... $١ - \sqrt{٢}$

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

• [١] ح = ...

(أ) ن ∪ نَ (ب) ص₊ ∪ ص₋ (جـ) ح₊ ∪ ح₋ (د) ط ∪ ح₋

• [٢] ن ∩ نَ = ...

(أ) ن (ب) نَ (جـ) ح (د) ∅

[٣] ن $\cup$ نَ = …………

(أ) $\emptyset$ (ب) ح (جـ) ن (د) نَ

[٤] ح$_+$ $\cap$ ح$_-$ = …………

(أ) $\emptyset$ (ب) ح (جـ) ح$_+$ (د) ح$_-$

[٥] ح$_+$ $\cup$ ح$_-$ = …………

(أ) ح (ب) $\emptyset$ (جـ) ح$_+$ (د) ح*

[٦] ح − نَ = …………

(أ) ح (ب) $\emptyset$ (جـ) ن (د) {٠}

[٧] ح − ن = …………

(أ) نَ (ب) ح (جـ) $\emptyset$ (د) {٠}

[٨] ح$_+$ $\cap$ {−١ ، ٠ ، ١} = …………

(أ) {٠ ، ١} (ب) {١} (جـ) {٠} (د) $\emptyset$

[٩] {س : س $\in$ ح ، س < ٠} = …………

(أ) ح$_+$ (ب) ح$_-$ (جـ) ح* (د) ح

[١٠] إذا كانت س عددًا حقيقيًا سالبًا فأى من الأعداد الآتية يمثل عددًا موجبًا ؟

(أ) س^{٢} (ب) س^{٣} (جـ) ٢ س (د) $\frac{\text{س}}{٢}$

[١١] مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ١ = ٠ فى ح هى …………

(أ) {−١} (ب) {١ ، −١} (جـ) {١} (د) $\emptyset$

[١٢] $\sqrt{(٢ - \pi)^{٢}}$ ………… (٢ − π) (حيث π النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها)

(أ) = (ب) > (جـ) < (د) $\geq$

[١٣] إذا كان : $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{أ}{\sqrt{٥}}$ عددين حقيقيين بين صفر ، ١ فإن : أ = …………

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٥}$ (د) ٢

٤ رتب الأعداد الآتية ترتيبًا تصاعديًا :

(١) $\sqrt{٨}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٧}$ ، $-\sqrt{١١}$

(٢) 📖 $\sqrt{٢٧}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، ٠,٦ ، $\sqrt[٣]{-١}$

---

٥ رتب الأعداد الآتية ترتيبًا تنازليًا :

(١) 📖 $\sqrt{٦٢}$ ، ٨ ، $-\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٠}$

(٢) $\sqrt{٦}$ ، ٩ ، $-\sqrt{١٠}$ ، $-\sqrt{٧}$ ، $-\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{١٠١}$

---

٦ اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية موجبة أصغر من ٢

---

٧ اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية سالبة أكبر من $-\sqrt{٦}$

---

٨ اكتب أربعة أعداد غير نسبية محصورة بين ١٥ ، ١٧

---

٩ 📖 أثبت أن :

$\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨ ومثل الأعداد $\sqrt{٣}$ ، ١,٧ ، ١,٨ على خط الأعداد.

---

١٠ حل المعادلات الآتية لأقرب جزء من مائة علمًا بأن س $\in$ ح :

(١) $س^٢ - ٦ = ٠$

(٢) $\frac{٣}{٤} س^٢ = ٢٤$

(٣) $\frac{١}{٢} س^٢ - ٥ = ٠$

(٤) $\frac{٢}{س^٣} + ٥ = ٢١$ ، س $\neq ٠$

(٥) $(س^٢ - ٩)(س^٣ - ٥) = ٠$

(٦) $(٢ س^٣ - ٥)(س^٢ + ١) = ٠$

تطبيقات هندسية

١١ 📖 أوجد طول ضلع مربع مساحته ٧ سم^٢ ، هل طول ضلعه وطول قطره عددان نسبيان ؟

«$\sqrt{٧}$ سم ، $\sqrt{١٤}$ سم»

---

١٢ 📖 أوجد طول حرف مكعب حجمه ١,٧٢٨ سم^٣ ، هل طول الحرف عدد نسبى ؟ «$\frac{٦}{٥}$ سم»

١٣ مكعب مساحته الكلية ١٣,٥ سم^{٢} ، أوجد طول حرفه ، هل طول الحرف عدد نسبى ؟

«١,٥ سم»

---

١٤ مربع طول ضلعه ٦ سم ، أوجد طول قطره.

«$\sqrt{٧٢}$ سم»

---

١٥ مستطيل بعداه ٥ ، ٧ من السنتيمترات ، أوجد طول قطره ، وإذا كانت مساحته تساوى مساحة مربع فأوجد طول ضلع المربع وكذا طول قطره.

«$\sqrt{٧٤}$ سم ، $\sqrt{٣٥}$ سم ، $\sqrt{٧٠}$ سم»

للمتفوقين

١٦ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\sqrt{٢} < \sqrt[٣]{٣}$

---

١٧ عددان حقيقيان مجموع مربعيهما ٧ وأكبرهما ٢ فأوجد العدد الآخر.

«$\pm \sqrt{٣}$»



الدرس **4**

الفـتـــرات

تمهيـد

• من خلال دراستك السابقة تعرفت على الطرق المختلفة للتعبير عن المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية ، والمجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة وكيفية تمثيلها على خط الأعداد.

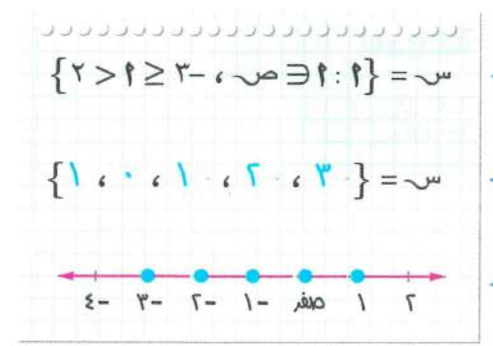
فمثلًا :

إذا كانت : س = مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من أو تساوى −٣ والأصغر من ٢

* فإنه يمكن التعبير عن المجموعة س بطريقة الصفة المميزة كالتالى :

* كما يمكن التعبير عنها بطريقة السرد كالتالى :

* وتمثل المجموعة س على خط الأعداد كما بالشكل :



• **والسؤال هل من الممكن استخدام نفس الطرق السابقة للتعبير عن المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وتمثيلها على خط الأعداد ؟!!**

بفرض أن : ك = مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى -٣ والأصغر من ٢

* فإنه يمكن التعبير عن المجموعة ك

بطريقة الصفة المميزة كالتالى : ⟵ ك = {أ : أ ∈ ح ، -٣ ≤ أ < ٢}

* ولكنه من المستحيل التعبير عن هذه المجموعة عن طريق سرد جميع عناصرها لأننا نعلم أنه بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية.

* ولنفس السبب لا يمكن تمثيل المجموعة ك على خط الأعداد بنقاط منفصلة كما بالشكل السابق ذكره.

ولذلك نستخدم طريقة أخرى للتعبير عن المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية وهى «الفترات»

وفيما يلى أنواع الفترات :

أولًا الفترات المحدودة

أ الفترة المغلقة

• المجموعة {س : س ∈ ح ، -٣ ≤ س ≤ ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية التى تتكون من العددين -٣ ، ٢ وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينهما ونرمز لها بالرمز [-٣ ، ٢]

وتُسمى «فترة مغلقة».

لاحظ أنه

عند كتابة الفترة يجب كتابة العدد الأصغر أولًا.

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

• لاحظ أن : -٣ ∈ [-٣ ، ٢] ، ٢ ∈ [-٣ ، ٢]

ونعبر عن ذلك برسم دائرتين مظللتين عند النقطتين اللتين تمثلان العددين -٣ ، ٢

ب الفترة المفتوحة

• المجموعة {س : س ∈ ح ، -٣ < س < ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين -٣ ، ٢ ولا يدخل ضمنها العددان -٣ ، ٢

ونرمز لها بالرمز]-٣ ، ٢[وتُسمى «فترة مفتوحة».

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

• لاحظ أن : -٣ ∉]-٣ ، ٢[، ٢ ∉]-٣ ، ٢[

ونعبر عن ذلك برسم دائرتين غير مظللتين عند النقطتين اللتين تمثلان العددين -٣ ، ٢

جـ الفترة نصف المفتوحة «نصف المغلقة»

(١) المجموعة {س : س ∈ ح ، -٣ ≤ س < ٢} تعبر عن العدد -٣ وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينه وبين العدد ٢ دون أن يكون العدد ٢ ضمنها

ونرمز لها بالرمز [-٣ ، ٢[وتُسمى «فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة».

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

• لاحظ أن : -٣ ∈ [-٣ ، ٢[، ٢ ∉ [-٣ ، ٢[

(٢) المجموعة {س : س ∈ ح ، -٣ < س ≤ ٢} تعبر عن العدد ٢ وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينه وبين العدد -٣ دون أن يكون العدد -٣ ضمنها

ونرمز لها بالرمز]-٣ ، ٢] وتُسمى «فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة».

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

• لاحظ أن : -٣ ∉]-٣ ، ٢] ، ٢ ∈]-٣ ، ٢]

ثانيًا الفترات غير المحدودة

١ المجموعة {س : س ∈ ح ، س ≥ ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية التى تتكون من العدد ٢ وجميع الأعداد الحقيقية الأكبر من ٢ بلا نهاية ،

ونرمز لها بالرمز [٢ ، ∞[حيث الرمز ∞ يُقرأ موجب ما لا نهاية وهو لا يعبر عن عدد حقيقى.

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

• لاحظ أن : ٢ ∈ [٢ ، ∞[

٢ المجموعة {س : س ∈ ح ، س > ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من العدد ٢ بلا نهاية ، ونرمز لها بالرمز]٢ ، ∞[

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

• لاحظ أن : ٢ ∉]٢ ، ∞[

٣ المجموعة {س : س ∈ ح ، س ≤ ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية التى تتكون من العدد ٢ وجميع الأعداد الحقيقية الأصغر من ٢ بلا نهاية ،

ونرمز لها بالرمز]-∞ ، ٢] حيث الرمز -∞ يقرأ سالب ما لا نهاية وهو لا يعبر عن عدد حقيقى.

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

• لاحظ أن : ٢ ∈]-∞ ، ٢]

٤ المجموعة {س : س ∈ ح ، س < ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من العدد ٢ بلا نهاية ونرمز لها بالرمز]-∞ ، ٢[

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

• لاحظ أن : ٢ ∉]-∞ ، ٢[

• ويمكن التعبير عما سبق رمزيًا فى الجدول التالى بفرض أن أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، أ < ب :

نوع الفترة		الفترة	التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد	لاحظ أن
الفترة المحدودة	المغلقة	[أ ، ب]	{س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب}		• أ ∈ [أ ، ب] • ب ∈ [أ ، ب]
	المفتوحة	]أ ، ب[	{س : س ∈ ح ، أ < س < ب}		• أ ∉]أ ، ب[• ب ∉]أ ، ب[
	نصف المفتوحة	[أ ، ب[	{س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب}		• أ ∈ [أ ، ب[• ب ∉ [أ ، ب[
		]أ ، ب]	{س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب}		• أ ∉]أ ، ب] • ب ∈]أ ، ب]
الفترة غير المحدودة		[أ ، ∞[	{س : س ∈ ح ، س ≥ أ}		أ ∈ [أ ، ∞[
		]أ ، ∞[	{س : س ∈ ح ، س > أ}		أ ∉]أ ، ∞[
		]-∞ ، أ]	{س : س ∈ ح ، س ≤ أ}		أ ∈]-∞ ، أ]
		]-∞ ، أ[	{س : س ∈ ح ، س < أ}		أ ∉]-∞ ، أ[

ملاحظات

• $ح =]-\infty ، \infty[$ • $ح_+ =]٠ ، \infty[$ • $ح_- =]-\infty ، ٠[$

• مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = $ح_+ \cup \{٠\} = [٠ ، \infty[$

• مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = $ح_- \cup \{٠\} =]-\infty ، ٠]$

مثال ١

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية على صورة فترة ثم مثلها على خط الأعداد :

١ $\{س : س \in ح ، -٣ < س \leq ٠\}$

٢ $\{أ : أ \in ح ، ١ \geq أ \geq -٢\}$

٣ $\{س : س \in ح ، س > ٠\}$

٤ $\{ص : ص \in ح ، -١ \geq ص\}$

الحـــل

١ $]-٣ ، ٠]$

٢ $[-٢ ، ١]$

٣ $]٠ ، \infty[$

٤ $]-\infty ، -١]$

مثال ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $٤ \in$ ....

(أ) $]٤ ، ٧]$ (ب) $[-٤ ، ٤[$ (جـ) $]٢ ، ٥[$ (د) $[-١١ ، -٤]$

٢ $\sqrt[٣]{-٨}$ .... $[-٨ ، -٢[$

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

٣ {١ ، ٦} ....]١ ، ٦]

(أ) ∈ (ب) ∉ (جـ) ⊂ (د) ⊄

٤ إذا كانت : س ∈ [–٥ ، ∞[فإن : ....

(أ) س > –٥ (ب) س ≤ –٥ (جـ) س < –٥ (د) س ≥ –٥

٥ مجموع الأعداد الحقيقية فى الفترة [–٣ ، ٣[هو ....

(أ) –٦ (ب) –٣ (جـ) صفر (د) ٦

الحـــل

١ (جـ)

٢ (ب) **تفسير الحل :** ∵ $\sqrt[3]{-8}$ = –٢ ، الفترة [–٨ ، –٢[مفتوحة عند –٢

∴ –٢ ∉ [–٨ ، –٢[

٣ (د) **تفسير الحل :** لأن : ١ ∉]١ ، ٦] لأن الفترة مفتوحة عند ١

٤ (ب)

٥ (ب) **تفسير الحل :** لأن كل عدد ينتمى إلى الفترة له معكوس جمعى ما عدا –٣

لأن ٣ ∉ [–٣ ، ٣[

حاول بنفسك ١

أكمل كلًا مما يأتى باستخدام أحد الرموز ∈ أ، ∉ أ، ⊂ أ، ⊄ :

١ –١ .... [–٤ ، –١[

٢ $\frac{1}{2}$ ....]٠ ، ١[

٣ {٢ ، ٤} .... [٢ ، ٥[

٤ $\sqrt[3]{7}$ ....]٢ ، ٣]

٥ {–١ ، ٠ ، ١} .... [٠ ، ١]

٦ |–٥| ....]–∞ ، ٠]

العمليات على الفترات

درسنا فيما سبق المجموعات وإجراء عمليات التقاطع والاتحاد والفرق والمكملة عليها.

فمثلًا :

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} فإن :

- س ∩ ص = مجموعة العناصر المشتركة بين س و ص = {٣ ، ٤}
- س ∪ ص = مجموعة العناصر الموجودة فى س أو ص دون تكرار = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
- س − ص = مجموعة العناصر الموجودة فى س وغير موجودة فى ص = {١ ، ٢}
- ص − س = مجموعة العناصر الموجودة فى ص وغير موجودة فى س = {٥ ، ٦}
- **وإذا كانت المجموعة الشاملة ش = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}**

فإن : مكملة س والتى يرمز لها بالرمز س̀ = ش − س

أى أن : س̀ = مجموعة العناصر الموجودة فى ش وغير موجودة فى س = {٥ ، ٦ ، ٧}

والأمثلة التالية توضح إجراء عمليات التقاطع والاتحاد والفرق على الفترات :

مثال ٣

إذا كانت : س = [−٣ ، ٣] ، ص = [−١ ، ٥[فأوجد مستعينًا بخط الأعداد :

١ س ∪ ص ٢ س ∩ ص ٣ س − ص ٤ ص − س

الحل

١ س ∪ ص = [−٣ ، ٥[

٢ س ∩ ص = [−١ ، ٣]

٣ س − ص = [−٣ ، −١[

٤ ص − س =]٣ ، ٥[

مثال ٤

أوجد كلًّا مما يأتى :

١]-∞ ، ٢] ∩]-٣ ، ∞[

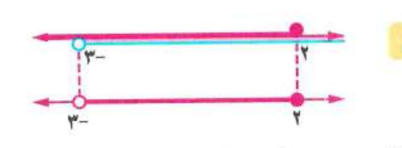
٢]-∞ ، ٣] ∪ [-٢ ، ٥[

٣ [٥ ، ∞[−]٥ ، ∞[

٤ [٢ ، ∞[∩]-∞ ، ٢[

الحل

١

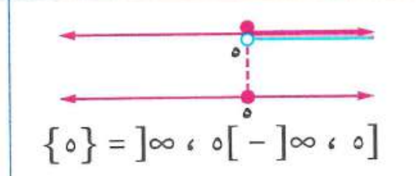


]-∞ ، ٢] ∩]-٣ ، ∞[=]-٣ ، ٢]

٢

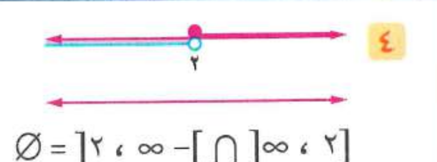
]-∞ ، ٣] ∪ [-٢ ، ٥[=]-∞ ، ٥[

٣



[٥ ، ∞[−]٥ ، ∞[= {٥}

٤



[٢ ، ∞[∩]-∞ ، ٢[= ∅

مثال ٥

إذا كانت : س =]-∞ ، ٢[، ص = [-١ ، ٥] فأوجد مستعينًا بخط الأعداد :

١ س ∪ ص

٢ س ∩ ص

٣ س − ص

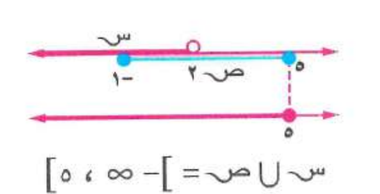
٤ ص − س

٥ سَ

٦ صَ

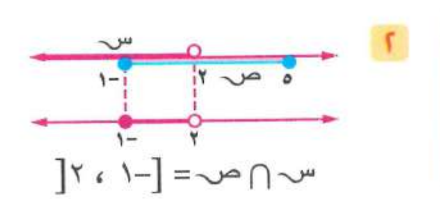
الحل

١



س ∪ ص =]-∞ ، ٥]

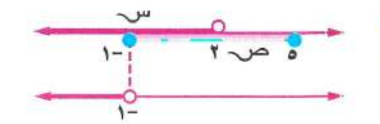
٢



س ∩ ص = [-١ ، ٢[



٣



س − ص =]−∞ ، −١[

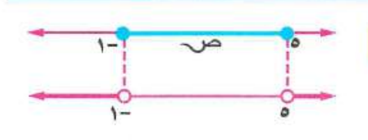
٤

ص − س = [٢ ، ٥]

٥

سَ = [٢ ، ∞[

٦



صَ =]−∞ ، −١[∪]٥ ، ∞[

= ح − [−١ ، ٥]

مثال ٦

إذا كانت : س = [١ ، ٤[، ص = {١ ، ٤} فأوجد :

١ س ∩ ص　　٢ س ∪ ص　　٣ س − ص　　٤ ص − س

الحل

١ س ∩ ص = {١}

٢ س ∪ ص = [١ ، ٤]

٣ س − ص =]١ ، ٤[

٤ ص − س = {٤}

حاول بنفسك ٢

إذا كانت : س = [−١ ، ٣[، ص =]٠ ، ٤] فأوجد مستعينًا بخط الأعداد :

١ س ∩ ص

٢ س ∪ ص

٣ س −]٠ ، ∞[

٤]٠ ، ∞[− ص

٥ سَ

٦ س ∩ {−٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}




● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل الجدول الآتى :

الفترة	التعبير عنها بالصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد
١ 📖 [-١ ، ٢]	{س : -١ ≤ س ≤ ٢ ، س ∈ ح}	(خط أعداد: -١ ، ٢)
٢ 📖]١ ، ٣[	....	....
٣ 📖	{س : ٠ < س ≤ ٣ ، س ∈ ح}	....
٤	....	(خط أعداد: -٢ ، ٣)
٥]-∞ ، ١]	....	....
٦	....	(خط أعداد: صفر)
٧	{س : س < ٤ ، س ∈ ح}	....
٨ [-٢ ، ∞[	....	....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ح = ...

(أ) $ح_+ \cap ح_-$ (ب) $ح_+ \cup ح_-$ (جـ)]-∞ ، ∞[(د) ن ∩ نَ

٢ $ح_+$ = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

٣ $ح_-$ = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

٤ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

٥ مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

(٧)]-٣ ، ٠] ∪]٠ ، ٢]
(٨)]-٣ ، ٠] ∩]٠ ، ٢]
(٩)]١ ، ٢] -]-٢ ، ٤]
(١٠)]-٢ ، ٤] -]١ ، ٢]
(١١)]-١ ، ٤] ∩]٥ ، ٧[
(١٢)]-١ ، ٥] - [-١ ، ٥[

٨ أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

(١)]-١ ، ∞[∪]-٣ ، ٤]
(٢)]٢ ، ∞[∩ [-٢ ، ٣[
(٣) [-∞ ، ٣] ∩]-٤ ، ∞[
(٤)]٢ ، ∞[∪ [-∞ ، ٣]
(٥) [-∞ ، ٣] -]-١ ، ∞[
(٦) [-∞ ، -٣] -]-٣ ، ١]
(٧) [-∞ ، ٢] - [-∞ ، ٠]
(٨) [-∞ ، ٣[∪ [٤ ، ∞[

٩ أكمل ما يأتى :

(١)]٣ ، ٥] ∪ {٣ ، ٥} = ...
(٢) [٣ ، ٥[∪ {٣ ، ٥} = ...
(٣)]٣ ، ٥] ∩ {٣ ، ٥} = ...
(٤) [٣ ، ٥[∩ {٣ ، ٥} = ...
(٥)]٣ ، ٥] - {٣ ، ٥} = ...
(٦) [٣ ، ٥[- {٣ ، ٥} = ...
(٧) {٣ ، ٥} -]٣ ، ٥] = ...
(٨) {٣ ، ٥} - [٣ ، ٥[= ....
(٩) [٣ ، ٥[∪ {٣} = ...
(١٠)]٣ ، ٥] - {٥} = ...
(١١) [٢ ، ٥[∩ {-٢ ، ٣ ، ٤} = ...
(١٢) [-٣ ، ٥] ∪ {-٢ ، ٣ ، ٤} = ...

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١)]-٣ ، ٤] - {-٣ ، ٥} = ...
(أ) [-٣ ، ٤[(ب) [-٣ ، ٤] (ج) [-٣ ، ٥[(د)]-٣ ، ٥[

(٢) إذا كانت : س ∈]-٣ ، ∞[فإن : ....
(أ) س > -٣ (ب) س ≥ -٣ (ج) س < -٣ (د) س ≤ -٣

٣ أكمل كلًا مما يأتى مستخدمًا أحد الرمزين ∈ أ، ∉ :

[١] ٣ .... [٣ ، ٥]
[٢] -٢ ....]-٢ ، ١]
[٣] صفر .... [-١ ، ٤[
[٤] |-٣| .... [٢ ، ∞[
[٥] $\sqrt{9}$ ....]-٣ ، ∞[
[٦] $\sqrt[3]{-1}$ ....]-∞ ، ١[
[٧] ١,٣ × ١٠$^{-5}$ .... ح+
[٨] $\sqrt{2}$ .... [٢ ، ٥]
[٩] ٥ ....]$\sqrt{5}$ ، $\sqrt{23}$[
[١٠] $\sqrt[3]{-125}$ ....]-$\sqrt{25}$ ، $\sqrt{25}$]

---

٤ إذا كانت : س = [٢ ، ٥[، ص = [-١ ، ٣] فأوجد مستعينًا بخط الأعداد :

[١] س ∪ ص
[٢] س ∩ ص
[٣] س - ص
[٤] ص - س
[٥] س َ
[٦] ص َ

---

٥ إذا كانت : س =]-∞ ، ٣] ، ص = [-٤ ، ∞[فأوجد مستعينًا بخط الأعداد :

[١] س ∪ ص
[٢] س ∩ ص
[٣] س - ص
[٤] ص - س
[٥] س َ
[٦] ص َ

---

٦ إذا كانت : س = [-١ ، ٤] ، ص = [٣ ، ∞[، ع = {٣ ، ٤}

فأوجد مستعينًا بخط الأعداد كلاً من :

[١] س ∪ ص
[٢] س ∩ ص
[٣] س - ص
[٤] س - ع
[٥] ص ∩ ع
[٦] ص - س
[٧] س َ
[٨] ص َ

---

٧ أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

[١] [-١ ، ٤] ∩ [٢ ، ٥]
[٢] [-١ ، ٤] ∪ [٢ ، ٥]
[٣]]-٢ ، ٣] ∩]٠ ، ١[
[٤]]-٢ ، ٣] ∪]٠ ، ١[
[٥] [٢ ، ٦] - [-١ ، ٣[
[٦] [-١ ، ٣[- [٢ ، ٦]

[٣] إذا كانت : س = {س : س ∈ ح ، ٢ < س ≤ ٥} فإن : [٣ ، ٤] .... س

(أ) ∋ (ب) ∌ (جـ) ⊂ (د) ⊄

[٤] {٣} ∩ [٣ ، ٦] = ...

(أ) ∅ (ب) {٣} (جـ)]٣ ، ٦[(د) {٦}

[٥] {٨ ، ٩ ، ١٠} −]٨ ، ١٠[= ....

(أ) ∅ (ب) {٨ ، ١٠} (جـ) {٩} (د) ط

[٦] مجموع الأعداد الحقيقية فى [−٧٥ ، ٧٥] هو ....

(أ) −٧٥ (ب) ٧٥ (جـ) ١٥٠ (د) صفر

---

١١ أكمل ما يأتى :

[١] ح ∩ [−٣ ، ٣] = ...

[٢] ح ∪]−١ ، ٤] = ...

[٣] ح −]−١ ، ∞[= ....

[٤] ح₋ − [−٣ ، ١] = ...

[٥]]−٢ ، ٥] − ح₊ = ...

[٦] [−٢ ، ٢] − ح₋ = ...

[٧]]−٣ ، ٢] ∩ ص₊ = ...

[٨] ط ∩]−٥ ، ٢[= ....

[٩] ص ∩]−١ ، ٣[= ....

[١٠] ح₊ ∩ [٠ ، ٥] = ...

[١١] ح₋ ∩ [−٣ ، ٢] = ...

للمتفوقين

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] فى الشكل المقابل :



إذا كان : س عددًا حقيقيًا فإن : س ∈ ....

(أ) ح₋ (ب) ح₊ (جـ)]−∞ ، −١] (د)]−∞ ، −١[

[٢] إذا كانت : س ∈ [-٣ ، ٤] فإن : س^{٢} ∈ ....

(أ) [٩ ، ١٦] (ب) [٠ ، ٩] (جـ) [٠ ، ١٦] (د) [-٩ ، ٠]

[٣] إذا كانت : س ∈ [-٥ ، ٤] فإن : س^{٢} ∈ ....

(أ) [٠ ، ١٦] (ب) [١٦ ، ٢٥] (جـ) [٠ ، ٢٥] (د) [-٥ ، ٠]

[٤] إذا كانت : س ∈ [١ ، ١٦] فإن : - √س ∈ ....

(أ) [١ ، ٤] (ب) [-١ ، ٤] (جـ) [-٤ ، -١] (د) [-٤ ، ٠]

[٥] إذا كانت : س ⊂ ح ، [٢ ، ٥] - س =]٢ ، ٥[فإن : س = ...

(أ) [٢ ، ٥] (ب) {٢ ، ٥} (جـ)]٢ ، ٥[(د) [٢ ، ٥[

[٦] إذا كانت : س ⊂ ح ،]٤ ، ٧] ∪ س = [١ ، ٧] فإن : س = ...

(أ) [١ ، ٣[(ب) [١ ، ٣] (جـ) [١ ، ٤[(د) [١ ، ٥]

[٧] إذا كانت : م ⊂ ح ، م ∩ [٣ ، ٨[= [٣ ، ٨[فإن : م = ...

(أ)]٣ ، ٨[(ب)]٣ ، ٨] (جـ) [٣ ، ٩] (د) [٣ ، ٧]

[٨] إذا كانت :]-∞ ، ك] ∩ [-٢ ، ٥] = [-٢ ، ٣[فإن : ك = ...

(أ) -٢ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) صفر

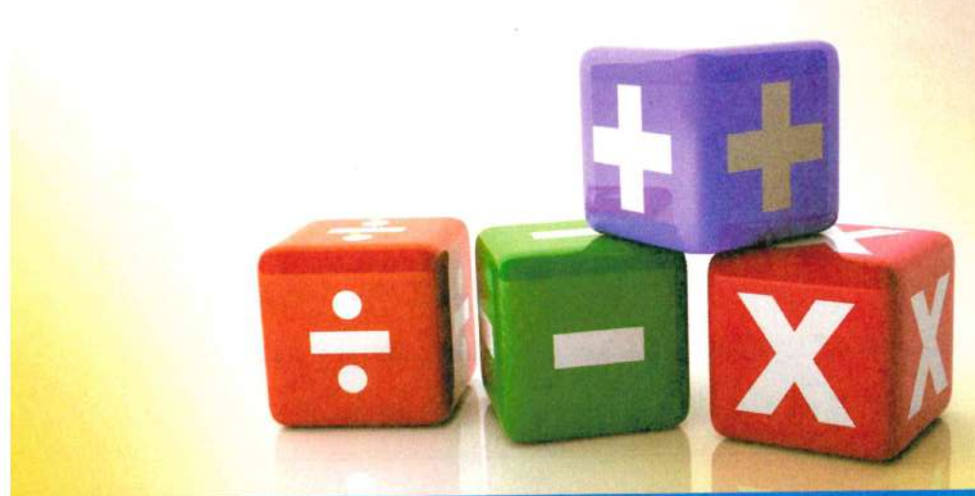
[٩] إذا كانت : [-١ ، س] ∩ [ص ، ٥] = [٢ ، ٣] فإن : س^{ص} = ...

(أ) ٨ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٩ (د) -١

---

١٣ إذا كانت : س ∩ ص = [٤ ، ٧] ، س ∪ ص = [٣ ، ٧] ، س ⊂ ص

أوجد : س ، ص ، ص - س



الدرس 5 العمليات على الأعداد الحقيقية

أولاً عملية الجمع

• نعلم أن : ٢ س ، ٣ س هما حدان جبريان متشابهان مجموعهما هو حد جبرى مشابه لهما.

حيث : ٢ س + ٣ س = (٢ + ٣) س = ٥ س

ومن ذلك نستنتج أن :

$٢\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٥} = (٢ + ٣)\sqrt{٥} = ٥\sqrt{٥}$

> **تذكر أن**
> العدد الحقيقى $٢\sqrt{٥}$ ينتج من حاصل ضرب العدد النسبى ٢ فى العدد غير النسبى $\sqrt{٥}$

• نعلم أن : ٢ س ، ٣ ص هما حدان جبريان غير متشابهين ونعبر عن مجموعهما بمقدار جبرى أبسط صورة له هى : ٢ س + ٣ ص

ومن ذلك نستنتج أن :

العددين الحقيقيين $٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$ نعبر عن مجموعهما بعدد حقيقى أبسط صورة له هى :

$٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢}$

خواص جمع الأعداد الحقيقية

الانغلاق :

لكل أ $\in$ ح ، ب $\in$ ح يكون : (أ + ب) $\in$ ح

أى أن : مجموع أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى فنقول إن : ح مغلقة تحت عملية الجمع.

فمثلًا : $\sqrt{5} \in$ ح ، $2\sqrt{5} \in$ ح نجد أن : $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \in$ ح

الإبدال :

لكل أ $\in$ ح ، ب $\in$ ح يكون : أ + ب = ب + أ

فمثلًا : $5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$ ، $4\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$

أى أن : $5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2}$

الدمج :

لكل أ $\in$ ح ، ب $\in$ ح ، جـ $\in$ ح

يكون : (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) = أ + ب + جـ

فمثلًا : $(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

، $\sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

أى أن : $(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + 5\sqrt{3} = \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 5\sqrt{3})$

وجود عنصر محايد جمعى :

لكل أ $\in$ ح يكون : أ + ٠ = ٠ + أ = أ

أى أن : الصفر هو العنصر المحايد الجمعى فى ح

فمثلًا : $\sqrt{2} + 0 = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ، $-\sqrt[3]{5} + 0 = 0 + (-\sqrt[3]{5}) = -\sqrt[3]{5}$

وجود معكوس جمعى لكل عدد حقيقى :

لكل أ ∈ ح يوجد (− أ) ∈ ح بحيث : أ + (− أ) = صفر «المحايد الجمعى»

فمثلًا : • المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٣}$ هو $-\sqrt{٣}$ والعكس صحيح لأن : $\sqrt{٣} + (-\sqrt{٣}) = ٠$

• المعكوس الجمعى للعدد ٢ + $\sqrt{٥}$ هو − (٢ + $\sqrt{٥}$) ويساوى −٢ − $\sqrt{٥}$

• المعكوس الجمعى للعدد ٣ − $\sqrt{٢}$ هو − (٣ − $\sqrt{٢}$) ويساوى $\sqrt{٢}$ − ٣

• المعكوس الجمعى للعدد صفر هو نفسه.

ملاحظة

• **حيث إن كل عدد حقيقى له معكوس جمعى فإن عملية الطرح ممكنة دائمًا فى ح وتعرف كما يلى :**

لكل أ ∈ ح ، ب ∈ ح يكون : أ − ب = أ + (− ب)

أى أن : عملية الطرح (أ − ب) تعنى جمع العدد أ مع المعكوس الجمعى للعدد ب

ويمكنك استنتاج أن : عملية الطرح فى ح ليست إبدالية ، وليست دامجة.

مثال ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\sqrt{٧} + \sqrt{٧}$ = ...

(أ) $\sqrt{١٤}$　　(ب) ٢ $\sqrt{٧}$　　(جـ) ٧　　(د) ١٤

٢ ٢ $\sqrt{٢}$ − ٣ $\sqrt{٢}$ = ...

(أ) −١　　(ب) − $\sqrt{٢}$　　(جـ) $\sqrt{٢}$　　(د) ٥ $\sqrt{٢}$

٣ ٤ + $\sqrt{٣}$ − ٧ − $\sqrt{٣}$ = ...

(أ) −٣ − ٢ $\sqrt{٣}$　　(ب) −٣ + ٢ $\sqrt{٣}$　　(جـ) −٣　　(د) ٣

٤ إذا كانت : س = ٩ $\sqrt{٥}$ ، ص = ٥ $\sqrt{٣}$ فإن : س − ص = ...

(أ) ٤ $\sqrt{٢}$　　(ب) ٤ $\sqrt{٥}$

(جـ) ٤ $\sqrt{٣}$　　(د) ٩ $\sqrt{٥}$ − ٥ $\sqrt{٣}$

٥ المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٧} - \sqrt{٥}$ هو ....

(أ) $-\sqrt{٧} - \sqrt{٥}$ (ب) $\sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{٥} - \sqrt{٧}$ (د) $\sqrt{٧} - \sqrt{٥}$

٦ إذا كان : $\sqrt{٢}$ + س = صفر فإن : س $- \sqrt{٢} =$ ....

(أ) صفر (ب) $-\sqrt{٢}$ (جـ) $-٢\sqrt{٢}$ (د) $٢\sqrt{٢}$

الحل

١ (ب)

٢ (ب) **تفسير الحل :** $٢\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} = (٢ - ٣)\sqrt{٢} = -\sqrt{٢}$

٣ (جـ) **تفسير الحل :** $٤ + \sqrt{٣} - ٧ - \sqrt{٣} = (٤ - ٧) + (\sqrt{٣} - \sqrt{٣}) = -٣ + ٠ = -٣$

٤ (د) **تفسير الحل :** س – ص $= ٩\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٣}$ وهذه هى أبسط صورة للفرق

٥ (جـ) **تفسير الحل :** المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٧} - \sqrt{٥}$ هو $-(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})$

ويساوى $-\sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ أو $\sqrt{٥} - \sqrt{٧}$

٦ (جـ) **تفسير الحل :** س تساوى المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٢}$ وهو $-\sqrt{٢}$

$\therefore$ س $- \sqrt{٢} = -\sqrt{٢} - \sqrt{٢} = -٢\sqrt{٢}$

حاول بنفسك ١

١ اكتب المعكوس الجمعى لكل من الأعداد التالية :

$\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt{٢} + \sqrt{٧}$ ، $\sqrt[٣]{٥} - ٣$ ، $-\sqrt{٦} - \sqrt[٣]{٧}$

---

٢ اختصر لأبسط صورة :

(١) $٢ + ٢\sqrt{٧} - ١ - ٥\sqrt{٧}$ (٢) $٣\sqrt{٥} + \sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٣}$

ثانيًا عملية الضرب

- نعلم أن : ٣×٢ ـس $= (٣ \times ٢)$ ـس $= ٦$ ـس

وعلى هذا فإن : $٣ \times ٢\sqrt{٣} = (٣ \times ٢)\sqrt{٣} = ٦\sqrt{٣}$

- كما نعلم أن : ٢ ـس $\times ٥$ ـس $= (٢ \times ٥)$ (ـس $\times$ ـس) $= ١٠$ ـس^٢

وعلى هذا فإن : $٢\sqrt{٣} \times ٥\sqrt{٣} = (٢ \times ٥)\left(\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}\right) = ١٠ \times \left(\sqrt{٣}\right)^٢ = ١٠ \times ٣ = ٣٠$

فمثلًا :

- $-٢ \times ٣\sqrt{٥} = (-٢ \times ٣)\sqrt{٥} = -٦\sqrt{٥}$
- $٤\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٤ \times \left(\sqrt{٢}\right)^٢ = ٤ \times ٢ = ٨$
- $-٢\sqrt{٧} \times ٤\sqrt{٧} = (-٢ \times ٤) \times \left(\sqrt{٧}\right)^٢ = -٨ \times ٧ = -٥٦$

خواص ضرب الأعداد الحقيقية

الانغلاق :

لكل $أ \in ح$ ، $ب \in ح$ يكون : $(أ \times ب) \in ح$

أى أن : حاصل ضرب أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى ونقول إن : ح مغلقة تحت عملية الضرب.

فمثلًا : $\sqrt{٣} \in ح$ ، $٢\sqrt{٣} \in ح$ نجد أن : $\sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٣} = ٢ \times ٣ = ٦ \in ح$

الإبدال :

لكل $أ \in ح$ ، $ب \in ح$ يكون : $أ \times ب = ب \times أ$

فمثلًا : $٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥} = ٦ \times ٥ = ٣٠$ ، $٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥} = ٦ \times ٥ = ٣٠$

أى أن : $٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥} = ٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥}$

الدمج :

لكل $ا \in ح$ ، $ب \in ح$ ، $ح \in ح$

يكون : $(ا \times ب) \times ح = ا \times (ب \times ح) = ا \times ب \times ح$

فمثلًا : $(٢\sqrt{٧} \times ٤\sqrt{٧}) \times \sqrt{٧} = ٥٦ \times \sqrt{٧} = ٥٦\sqrt{٧}$

، $٢\sqrt{٧} \times (٤\sqrt{٧} \times \sqrt{٧}) = ٢\sqrt{٧} \times ٢٨ = ٥٦\sqrt{٧}$

أى أن : $(٢\sqrt{٧} \times ٤\sqrt{٧}) \times \sqrt{٧} = ٢\sqrt{٧} \times (٤\sqrt{٧} \times \sqrt{٧})$

وجود عنصر محايد ضربى :

لكل $ا \in ح$ يكون : $ا \times ١ = ١ \times ا = ا$

أى أن : الواحد هو العنصر المحايد الضربى فى ح فمثلًا : $\sqrt[٣]{٥} \times ١ = ١ \times \sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٥}$

وجود معكوس ضربى لكل عدد حقيقى لا يساوى الصفر :

لكل عدد حقيقى ا $\neq$ صفر يوجد عدد حقيقى $\frac{١}{ا}$ بحيث : $ا \times \frac{١}{ا} = ١$ «المحايد الضربى»

فمثلًا : • المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣}$ هو $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

لأن : $\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = ١$

• المعكوس الضربى للعدد $-\frac{\sqrt{٢}}{٥}$ هو $-\frac{٥}{\sqrt{٢}}$

• المعكوس الضربى للعدد ١ هو نفسه ، والمعكوس الضربى للعدد −١ هو نفسه.

لاحظ أن

- العدد ومعكوسه الضربى لهما نفس الإشارة.
- لا يوجد معكوس ضربى للصفر (لأن : $\frac{١}{٠}$ ليس لها معنى).

! ملاحظة

- **حيث إن كل عدد حقيقى لا يساوى الصفر له معكوس ضربى ؛ فإن عملية القسمة على أى عدد حقيقى خلاف الصفر ممكنة فى ح وتعرف كما يلى :**

لكل $ا \in ح$ ، $ب \in ح - \{٠\}$ يكون : $ا \div ب = ا \times \frac{١}{ب}$

أى أن : عملية القسمة $(ا \div ب)$ تعنى ضرب العدد ا فى المعكوس الضربى للعدد ب بشرط ب $\neq$ ٠.

ويمكنك استنتاج أن : عملية القسمة فى ح ليست إبدالية ، وليست دامجة.

مثال ٢

أوجد ناتج ما يأتى : $\frac{\sqrt{٥}}{٥} \times \frac{٤\sqrt{٥}}{١٢\sqrt{٢}} \div \frac{١}{٣\sqrt{٢}}$

الحل

$\left(\frac{\sqrt{٥}}{٥} \times \frac{٤\sqrt{٥}}{١٢\sqrt{٢}}\right) \div \frac{١}{٣\sqrt{٢}} = \frac{١}{٣\sqrt{٢}} \div \frac{٥}{١٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{٣\sqrt{٢}} \div \frac{١}{٣\sqrt{٢}} = \frac{١}{٣\sqrt{٢}} \times ٣\sqrt{٢} = ١$

مثال ٣

اكتب كلاً مما يأتى بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

١ $\frac{٩}{\sqrt{٣}}$ ٢ $-\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ٣ $\frac{٥}{٣\sqrt{٥}}$

الحل

١ بضرب حدى العدد $\frac{٩}{\sqrt{٣}}$ فى $\sqrt{٣}$

يكون : $\frac{٩}{\sqrt{٣}} = \frac{٩}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٩\sqrt{٣}}{٣} = ٣\sqrt{٣}$

لاحظ أن

$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ١$ «المحايد الضربى»

٢ $-\frac{٣}{\sqrt{٢}} = -\frac{٣}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = -\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

٣ $\frac{٥}{٣\sqrt{٥}} = \frac{٥}{٣\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥\sqrt{٥}}{٣ \times ٥} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

حل آخر : $\because \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = ٥$ $\therefore \frac{٥}{٣\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}{٣\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

مثال ٤

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ هو ....

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $٢\sqrt{٥}$ (د) $-٢\sqrt{٥}$

٢ المعكوس الجمعى للعدد $\frac{٧}{\sqrt{٧}}$ هو ....

(أ) $\frac{\sqrt{٧}}{٧}$ (ب) ٧ (جـ) $-\sqrt{٧}$ (د) -٧

٣ المعكوس الضربى للعدد $\frac{٣\sqrt{٢}}{٤}$ يساوى $\frac{.....}{٣}$

(أ) $٤\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣\sqrt{٢}}$

الحــل

١ (جـ) **تفسير الحل :** المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ هو $\frac{١٠}{\sqrt{٥}} = \frac{١٠}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$

$= \frac{١٠\sqrt{٥}}{٥} = ٢\sqrt{٥}$

٢ (جـ) **تفسير الحل :** المعكوس الجمعى للعدد $\frac{٧}{\sqrt{٧}}$ هو $- \frac{٧}{\sqrt{٧}} = - \frac{٧}{\sqrt{٧}} \times \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٧}}$

$= - \frac{٧\sqrt{٧}}{٧} = -\sqrt{٧}$

٣ (ب) **تفسير الحل :** المعكوس الضربى للعدد $\frac{٣\sqrt{٢}}{٤}$ هو $\frac{٤}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٤}{٣\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٤\sqrt{٢}}{٦} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

حاول بنفسك ٢

١ أوجد كلًا مما يأتى : (١) $\sqrt{٥} \times \frac{١}{\sqrt{٥}} \times \sqrt{٥}$ (٢) $\frac{\sqrt{٣}}{٣} \times \frac{٤\sqrt{٥}}{٢٠} \times \frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}$

٢ اجعل المقام عددًا صحيحًا : (١) $\frac{٣}{\sqrt{٧}}$ (٢) $\frac{٩}{٢\sqrt{٦}}$

توزيع الضرب على الجمع والطرح :

لأى ثلاثة أعداد حقيقية أ ، ب ، حـ يكون :

- أ (ب ± حـ) = أ ب ± أ حـ
- (ب ± حـ) أ = ب أ ± حـ أ

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $٢\sqrt{٣}\left(٥\sqrt{٣}-٤\right)$

٢ $\left(٢+\sqrt{٣}\right)\left(\sqrt{٣}+٧\right)$

٣ $\left(٧\sqrt{٢}-٥\right)\left(٧\sqrt{٢}+٥\right)$

٤ $\left(٥\sqrt{٣}-٢\right)^{٢}$

الحل

١ $٢\sqrt{٣}\left(٥\sqrt{٣}-٤\right)=٢\sqrt{٣}\times ٥\sqrt{٣}+٢\sqrt{٣}\times(-٤)$

$=١٠\times ٣-٨\sqrt{٣}=٣٠-٨\sqrt{٣}$

٢ $\left(٢+\sqrt{٣}\right)\left(\sqrt{٣}+٧\right)=٢\sqrt{٣}+١٤+٣+٧\sqrt{٣}$

$=\left(٢\sqrt{٣}+٧\sqrt{٣}\right)+(١٤+٣)=٩\sqrt{٣}+١٧$

٣ باستخدام الضرب بمجرد النظر :

$\left(٧\sqrt{٢}-٥\right)\left(٧\sqrt{٢}+٥\right)=\left(٧\sqrt{٢}\right)^{٢}-(٥)^{٢}$

$=٧^{٢}\times\left(\sqrt{٢}\right)^{٢}-٥^{٢}$

$=٤٩\times ٢-٢٥$

$=٩٨-٢٥=٧٣$

لاحظ أن

$(\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}-\text{ب})=\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢}$

٤ باستخدام الضرب بمجرد النظر :

$\therefore \left(٥\sqrt{٣}-٢\right)^{٢}=\left(٥\sqrt{٣}\right)^{٢}-٢\times ٥\sqrt{٣}\times ٢+(-٢)^{٢}$

$=٥^{٢}\times\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}-٢٠\sqrt{٣}+٤$

$=٢٥\times ٣-٢٠\sqrt{٣}+٤$

$=٧٥-٢٠\sqrt{٣}+٤=٧٩-٢٠\sqrt{٣}$

لاحظ أن

- $(\text{أ}+\text{ب})^{٢}=\text{أ}^{٢}+٢\,\text{أ}\text{ب}+\text{ب}^{٢}$
- $(\text{أ}-\text{ب})^{٢}=\text{أ}^{٢}-٢\,\text{أ}\text{ب}+\text{ب}^{٢}$

مثال ٦

إذا كانت : س = ٥ $\sqrt{٣}$ − ٢ ، ص = ٥ $\sqrt{٣}$ + ٢

أوجد قيمة المقدار : س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

الحل

من الضرب بمجرد النظر نلاحظ أن : (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

∴ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = (٥ $\sqrt{٣}$ − ٢ + ٥ $\sqrt{٣}$ + ٢)^{٢}

= (١٠ $\sqrt{٣}$)^{٢} = (١٠)^{٢} × ($\sqrt{٣}$)^{٢} = ١٠٠ × ٣ = ٣٠٠

مثال ٧

أعط تقديرًا لناتج : (٥ + $\sqrt{١٠}$) (٣ − $\sqrt[٣]{٧}$) وتحقق من صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

أولاً : تقدير $\sqrt{١٠}$ هو ٣ (لأن : $\sqrt{٩}$ = ٣) ∴ تقدير (٥ + $\sqrt{١٠}$) هو ٥ + ٣ = ٨

، تقدير $\sqrt[٣]{٧}$ هو ٢ (لأن : $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢) ∴ تقدير (٣ − $\sqrt[٣]{٧}$) هو ٣ − ٢ = ١

∴ تقدير (٥ + $\sqrt{١٠}$) (٣ − $\sqrt[٣]{٧}$) هو ٨ × ١ = ٨

ثانيًا : باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو ٨,٨٧٢٩ أى أن التقدير مقبول.

حاول بنفسك ٣

١ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١) ٥ $\sqrt{٢}$ (٣ $\sqrt{٢}$ − ٢)

٢) (٢ $\sqrt{٣}$ − ٣) (٢ $\sqrt{٣}$ + ٣)

٢ إذا كانت : س = ٢ $\sqrt{٣}$ − ١ ، ص = ٢ $\sqrt{٣}$ + ١ **أوجد قيمة :** س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢}



تماريـن

5 على العمليات على الأعداد الحقيقية



اختبـــار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد كلًا مما يأتى فى أبسط صورة :

[١] $\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣}$

[٢] $٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٥} + \sqrt{٥}$

[٣] $٥\sqrt[٣]{٧} - ٨\sqrt[٣]{٧} + ٢\sqrt[٣]{٧}$

[٤] $٤\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥} - \sqrt{٥}$

---

٢ أوجد كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

[١] $\sqrt{٥} - \sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$

[٢] 📖 $٢\sqrt{٣} + ٥ + \sqrt{٣} - ٦$

[٣] 📖 $٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٢} + \sqrt{٧} + ٥\sqrt{٧}$

[٤] $٢\sqrt{٢} - ٣\sqrt[٣]{٢} + ٥\sqrt{٢} + \sqrt[٣]{٢}$

[٥] $\frac{١}{٤}\sqrt{٢} + \frac{٢}{٧}\sqrt{٥} + \frac{٣}{٤}\sqrt{٢} - \frac{٢}{٧}\sqrt{٥}$

[٦] $٨\sqrt{\frac{١}{٤}} + ٢\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٦٤} - ٥\sqrt[٣]{٣}$

---

٣ أوجد ناتج كل مما يأتى :

[١] $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

[٢] $-٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥}$

[٣] $٢ \times ٣\sqrt{٢}$

[٤] $\frac{١}{٣}\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

[٥] $\left(\sqrt[٣]{٥}\right)^{٣} \times ٣\sqrt{٣}$

[٦] $٢\sqrt{٣} \times \frac{٢\sqrt{٧}}{٧} \div \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٧}}$

---

٤ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

[١] $٢\left(\sqrt{٢} + \sqrt{٥}\right)$

[٢] 📖 $\sqrt{٢}\left(٥ + \sqrt{٢}\right)$

[٣] 📖 $\sqrt{٧}\left(\sqrt{٧} + ٢\right)$

[٤] 📖 $-\sqrt{٣}\left(-٥ - \sqrt{٣}\right)$

[٥] $-٢\sqrt{٥}\left(٣ - \sqrt{٥}\right)$

[٦] $\sqrt{٧}\left(\frac{٢}{\sqrt{٧}} - \sqrt{٧} + ٣\right)$

[٧] $-٣\left(٨ + ٢\sqrt{٣}\right) + ٦\sqrt{٣}$

[٨] 📖 $\sqrt{٥}\left(٣ - \sqrt{٥}\right) - ٢\left(١ + \sqrt{٥}\right)$

٥ أوجد ناتج كل من العمليات الآتية :

[١] $(\sqrt{٢}+١)(\sqrt{٢}-١)$ | [٢] $(٤-٣\sqrt{٢})(٤+٣\sqrt{٢})$

[٣] $(\sqrt{٥}-١)^{٢}$ | [٤] $(٢\sqrt{٣}+٤)^{٢}$

[٥] $(\sqrt{٣}+٢)(\sqrt{٣}-١)$ | [٦] $(٥-\sqrt{٣})^{٢}-٢٨$

٦ اجعل المقام فى كل مما يأتى عددًا صحيحًا :

[١] $\frac{١٠}{\sqrt{٥}}$ | [٢] $-\frac{٦}{\sqrt{٣}}$ | [٣] $\frac{٢}{٣\sqrt{٢}}$

[٤] $\frac{٦}{٢\sqrt{٣}}$ | [٥] $\frac{\sqrt{٢}+٣}{\sqrt{٢}}$ | [٦] $\frac{\sqrt{٥}-١٥}{٢\sqrt{٥}}$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $٢\sqrt{٣}+٣\sqrt{٣}=$ ....

(أ) $٥\sqrt{٦}$ (ب) $٥\sqrt{٣}$ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٥\sqrt[٣]{٣}$

[٢] $٥+٧\sqrt{٢}-٤+\sqrt{٢}=$ ....

(أ) ١٥ (ب) $١+٧\sqrt{٢}$ (جـ) $١+٨\sqrt{٢}$ (د) $١+٦\sqrt{٢}$

[٣] $-٢\sqrt{٣}\times\sqrt{٣}=$ ....

(أ) -٦ (ب) $-٢\sqrt{٣}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) ٦

[٤] $(٢\sqrt[٣]{٥})^{٣}=$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) $٤\sqrt[٣]{٥}$ (د) ٤٠

[٥] المعكوس الجمعى للعدد $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ هو ....

(أ) $-٢\sqrt{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣}$ (جـ) $-٣\sqrt{٢}$ (د) $٣\sqrt{٢}$

[٦] المعكوس الجمعى للعدد $(\sqrt{٢}-\sqrt{٥})$ هو ....

(أ) $\sqrt{٢}+\sqrt{٥}$ (ب) $\sqrt{٥}-\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}-\sqrt{٥}$ (د) $-\sqrt{٢}-\sqrt{٥}$

[٧] المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥}$ هو ....

(أ) -٥ (ب) $\frac{-١}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{\sqrt{٥}}{٥}$

[٨] المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ هو ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٦}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

[٩] إذا كانت : $س = \sqrt{٢} + ١٠$ ، $ص = \sqrt{٢} - ١٠$

فإن : $(س + ص)^٢ =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) $٤\sqrt{٢}$

---

٨ أكمل ما يأتى :

[١] المحايد الضربى فى ح هو .... والمحايد الجمعى فى ح هو ....

[٢] المعكوس الجمعى للعدد $١ - \sqrt{٢}$ هو ....

[٣] المعكوس الضربى للعدد $\frac{٢\sqrt{٣}}{٥}$ هو $\frac{.....}{٦}$

[٤] المعكوس الضربى للعدد $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ هو $\frac{.....}{\sqrt{٣}}$

[٥] $٧ + \sqrt{٣} = ٥ + ($............ + ...$)$

[٦] إذا كانت : $أ = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ، $ب = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ فإن : $\frac{أ}{ب} =$ ....

[٧] $(\sqrt{٣} - ٢)^٢ = ٧ -$ ....

[٨] إذا كان : $\sqrt{س} = \sqrt{٢} + ١$ فإن : $س =$ ....

[٩] إذا كانت : $س^٢ = (٢\sqrt{٣} - \sqrt{٧})(٢\sqrt{٣} + \sqrt{٧})$ فإن : $س =$ ....

[١٠] إذا كان : $س^٢ - ص^٢ = ١٦$ ، $س - ص = \sqrt{٢}$ فإن : $س + ص =$ ....

[١١] إذا كان طول ضلع مربع ل سم ومساحته ١٥ سم^٢ فإن مساحة المربع الذى طول ضلعه ٢ ل سم تساوى ....

[١٢] إذا كانت : أ ∈ ع ، ب ∈ ع

فإن : أ − ب تعنى ناتج جمع العدد أ و .... للعدد ب

[١٣] إذا كانت : أ ∈ ط ، ب ∈ ن ، حـ ∈ ع فإن : (أ + ب + حـ) ∈ ....

---

٩ **إذا كانت :** س = $\sqrt{٥}$ − ٢ ، ص = $\sqrt{٥}$ + ٢ **فأوجد قيمة كل من :**

[١] س + ص	[٢] س − ص	[٣] س ص
[٤] $س^{٢} - ص^{٢}$	[٥] $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$	[٦] $س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢}$

---

١٠ **إذا كانت :** س = $\sqrt{١٥}$ + ٢ ، ص = ٤ − $\sqrt[٣]{٢٥}$

قدر قيمة كل من :

[١] س ، ص [٢] س × ص [٣] س + ص

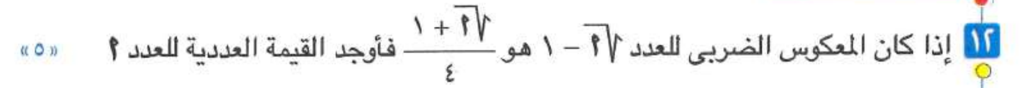
اختبر صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة.

تطبيق هندسى

١١ مستطيل بعداه $(٦ + \sqrt{٥})$ سم ، $(٦ - \sqrt{٥})$ سم ، احسب محيطه ومساحته.

« ٢٤ سم ، ٣١ $سم^{٢}$ »

للمتفوقين



١٢ إذا كان المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{أ}$ − ١ هو $\frac{\sqrt{أ} + ١}{٤}$ فأوجد القيمة العددية للعدد أ « ٥ »

---

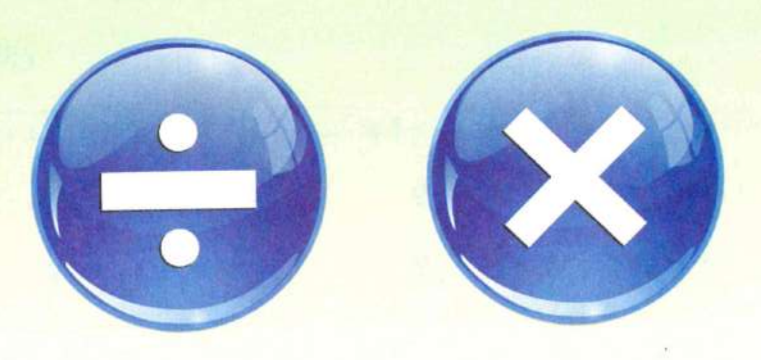
١٣ **إذا كان :** س = ٢ ص = ٤ ع = $\sqrt{٢}$

فأوجد قيمة : $س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٤ ع^{٢}$ « $٣\frac{١}{٢}$ »

---

١٤ إذا كان العدد ص معكوسًا جمعيًا للعدد س ، $\frac{١}{٢}$ (ص − س) = ١ − $\sqrt{٢}$

أثبت أن : س ص − ٢ $\sqrt{٢}$ = −٣



الدرس 6 العمليات على الجذور التربيعية

* إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

١ $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ ب}$

فمثلًا : • $\sqrt{٣} \times \sqrt{١٢} = \sqrt{٣٦} = ٦$ • $\sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥ \times ٢} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$

٢ $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ (حيث ب $\neq$ ٠)

فمثلًا : • $\frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٨}{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$ • $\sqrt{\frac{١٦}{٤٩}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٤٩}} = \frac{٤}{٧}$

٣ $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} \times \frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أ ب}}{ب}$ (حيث ب $\neq$ ٠)

تستخدم هذه العملية لجعل المقام عددًا صحيحًا.

فمثلًا : • $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{١٠}}{٥}$ • $\sqrt{\frac{٣}{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

ملاحظتان

❶ $\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}} \neq \text{أ} + \text{ب}$ ، $\sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}} \neq \text{أ} - \text{ب}$

فمثلًا :
- $\sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢}} \neq ٦ + ٨$ **لأن :** $\sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢}} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$
- $\sqrt{٢٥ - ٩} \neq ٥ - ٣$ **لأن :** $\sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

❷ $\text{أ}\sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أ}^{٢}\text{ب}}$

فمثلًا :
- $٢\sqrt{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٤ \times \frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}$
- $١٥\sqrt{\frac{١}{٣}} = ٥ \times ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} = ٥\sqrt{٩ \times \frac{١}{٣}} = ٥\sqrt{٣}$

مثال ١

ضع كلًا مما يأتي على صورة أ $\sqrt{\text{ب}}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة :

١ $\sqrt{٢٧}$ ٢ $٥\sqrt{٥٤}$ ٣ $٣\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ ٤ $\frac{\sqrt{٨٤}}{\sqrt{٧}}$

الحل

١ $\sqrt{٢٧} = \sqrt{٩ \times ٣} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٣} = ٣\sqrt{٣}$

٢ $٥\sqrt{٥٤} = ٥\sqrt{٩ \times ٦} = ٥ \times \sqrt{٩} \times \sqrt{٦} = ٥ \times ٣ \times \sqrt{٦} = ١٥\sqrt{٦}$

٣ $٣\sqrt{\frac{٢}{٣}} = ٣ \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = ٣ \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٣ \times \frac{\sqrt{٦}}{٣} = \sqrt{٦}$

حل آخر : $٣\sqrt{\frac{٢}{٣}} = \sqrt{٣^{٢} \times \frac{٢}{٣}} = \sqrt{٣ \times ٢} = \sqrt{٦}$

٤ $\frac{\sqrt{٨٤}}{\sqrt{٧}} = \sqrt{\frac{٨٤}{٧}} = \sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة :

١ $\sqrt{٤٥} - ٢\sqrt{٢٠} + ٢\sqrt{٥}$

٢ $٢\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - ٤٢\sqrt{\frac{١}{٢}}$

٣ $٢\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} - \frac{٦}{\sqrt{٣}}$

الحل

١ $\sqrt{٤٥} - ٢\sqrt{٢٠} + ٢\sqrt{٥} = \sqrt{٩ \times ٥} - ٢\sqrt{٤ \times ٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= \sqrt{٩} \times \sqrt{٥} - ٢ \times \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= ٣\sqrt{٥} - ٢ \times ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= ٣\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} = \sqrt{٥}$

٢ $٢\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - ٤٢\sqrt{\frac{١}{٢}} = ٢\sqrt{٩ \times ٢} + \sqrt{٢٥ \times ٢} - ٤٢ \times \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٢}}$

$= ٢ \times \sqrt{٩} \times \sqrt{٢} + \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢} - ٤٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= ٢ \times ٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} - ٢١\sqrt{٢} = -١٠\sqrt{٢}$

٣ $٢\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} - \frac{٦}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٩ \times ٣} - ٣ \times \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} - \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

$= ٦\sqrt{٣} - \sqrt{٣} - \frac{٦\sqrt{٣}}{٣}$

$= ٦\sqrt{٣} - \sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} = ٣\sqrt{٣}$

مثال ٣

أوجد ناتج كل مما يأتى :

١ $٢\sqrt{٣}\left(\sqrt{٦}+٥\right)$ **٢** $\left(٣\sqrt{٢}-٥\right)\left(٣\sqrt{٢}+٥\right)$ **٣** $\left(\sqrt{٢}+\sqrt{٦}\right)^{٢}$

الحل

١ $٢\sqrt{٣}\left(\sqrt{٦}+٥\right)=٢\sqrt{٣}\times\sqrt{٦}+٢\sqrt{٣}\times٥=٢\sqrt{١٨}+١٠\sqrt{٣}$

$=٢\sqrt{٩\times٢}+١٠\sqrt{٣}=٦\sqrt{٢}+١٠\sqrt{٣}$

٢ $\left(٣\sqrt{٢}-٥\right)\left(٣\sqrt{٢}+٥\right)=\left(٣\sqrt{٢}\right)^{٢}-(٥)^{٢}$

$=٣^{٢}\times\left(\sqrt{٢}\right)^{٢}-(٥)^{٢}$

$=٩\times٢-٢٥=١٨-٢٥=-٧$

تذكر أن

$(أ-ب)(أ+ب)=أ^{٢}-ب^{٢}$

٣ $\left(\sqrt{٢}+\sqrt{٦}\right)^{٢}=\left(\sqrt{٢}\right)^{٢}+٢\times\sqrt{٢}\times\sqrt{٦}+\left(\sqrt{٦}\right)^{٢}$

$=٢+٢\sqrt{١٢}+٦$

$=٨+٢\sqrt{٤\times٣}=٨+٤\sqrt{٣}$

تذكر أن

- $(أ+ب)^{٢}=أ^{٢}+٢أب+ب^{٢}$
- $(أ-ب)^{٢}=أ^{٢}-٢أب+ب^{٢}$

مثال ٤

إذا كانت : $أ=\frac{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ **فأوجد قيمة :** $أ^{٢}+٢\sqrt{٣}$

الحل

لتسهيل الحل نجعل المقام عددًا صحيحًا بضرب البسط والمقام فى $\sqrt{٢}$

$$\therefore أ = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} \times \sqrt{٢} - \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{١٢} - ٢}{٢} = \frac{\sqrt{٤ \times ٣} - ٢}{٢} = \frac{٢\sqrt{٣} - ٢}{٢} = \frac{٢\left(\sqrt{٣} - ١\right)}{٢} = \sqrt{٣} - ١$$

$$\therefore أ^{٢} = \left(\sqrt{٣} - ١\right)^{٢} = \left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - ٢ \times \sqrt{٣} \times ١ + ١$$

$$= ٣ - ٢\sqrt{٣} + ١ = ٤ - ٢\sqrt{٣}$$

$$\therefore أ^{٢} + ٢\sqrt{٣} = ٤ - ٢\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} = ٤$$

طريقة أخرى لتبسيط أ :

$$\because أ = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \qquad \therefore أ = \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢}} - \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٦}{٢}} - ١ = \sqrt{٣} - ١$$

حاول بنفسك

١ اختصر لأبسط صورة :

(١) $\sqrt{٧٥} - ٢\sqrt{٢٧} + \sqrt{٣}$

(٢) $٢\sqrt{٥٠} - ٣\sqrt{٢} - ٤\sqrt{\frac{١}{٨}}$

٢ اكتب كلًا مما يأتي بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

(١) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٥}}$

(٢) $\frac{١ + \sqrt{٣}}{٣\sqrt{٣}}$

عجائب الأرقام

$١ \times ١ = ١$

$١١ \times ١١ = ١٢١$

$١١١ \times ١١١ = ١٢٣٢١$

$١١١١ \times ١١١١ = ١٢٣٤٣٢١$

فكر كم يكون ناتج : ١١١١١×١١١١١ وهكذا ...

تماريـن 6 على العمليات على الجذور التربيعية




اختبـــار تفاعلي

● تذكر ● فهـم ○ تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ ضع كلًا مما يأتي على صورة $أ\sqrt{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة :

[١] 📖 $\sqrt{١٢}$	[٢] 📖 $\sqrt{٢٨}$	[٣] 📖 $٢\sqrt{٧٢}$
[٤] $\frac{٢}{٥}\sqrt{١٠٠٠}$	[٥] $٢\sqrt{\frac{١}{٢}}$	[٦] $٦\sqrt{\frac{٢}{٣}}$

---

٢ اختصر كلًا مما يأتي لأبسط صورة :

[١] 📖 $\sqrt{٥٠} + \sqrt{٨}$ «$٧\sqrt{٢}$»

[٢] 📖 $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥}$ «$-\sqrt{٥}$»

[٣] $٣\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨}$ «$٢\sqrt{٢}$»

[٤] $\sqrt{٩٨} - \sqrt{١٢٨} - \sqrt{١٨} + ٤\sqrt{٢}$ «صفر»

[٥] 📖 $٢\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} + \frac{١}{٣}\sqrt{١٦٢}$ «$١٤\sqrt{٢}$»

[٦] $\sqrt{٩٨} + \sqrt{٥٠} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٠٠} - \sqrt{٢}$ «$٦\sqrt{٢}$»

[٧] 📖 $\sqrt{٢٧} + ٥\sqrt{١٨} - \sqrt{٣٠٠}$ «$١٥\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٣}$»

---

٣ اختصر كلًا مما يأتي لأبسط صورة :

[١] $٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٢٠} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$ «$٩\sqrt{٥}$»

[٢] $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$ «$\sqrt{٢}$»

[٣] 📖 $٢\sqrt{٥} + ٦\sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{١٢} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$ «$\sqrt{٥}$»

[٤] $\sqrt{٣} + \frac{٣}{\sqrt{٣}} - \sqrt{٢} \times \sqrt{٦}$ «صفر»

[٥] $\sqrt{١٨} - \frac{\sqrt{١٢}}{\sqrt{٦}}$ «$٢\sqrt{٢}$»

[٦] $\sqrt{(-٥)^{٢}} + \sqrt{١٨} - \frac{٦}{\sqrt{٢}}$ «٥»

٤ اختصر كلًا مما يأتي لأبسط صورة :

[١] $٢\sqrt{٣} \times ٥\sqrt{٢}$ «$١٠\sqrt{٦}$»

[٢] 📖 $٢\sqrt{١٨} \times ٣\sqrt{٢}$ «٣٦»

[٣] 📖 $\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{١٠}$ «$١٠\sqrt{٢}$»

[٤] $\sqrt{\frac{٢}{٧}} \times \sqrt{\frac{٧}{٢}}$ «١»

[٥] $\frac{٣\sqrt{١٥}}{\sqrt{٥}}$ «$٣\sqrt{٣}$»

[٦] $١٢\sqrt{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt{٥٤}$ «٧٢»

٥ اختصر كلًا مما يأتي لأبسط صورة :

[١] $\sqrt{٦}\left(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}\right)$

[٢] $٥\sqrt{٢}\left(٢\sqrt{٢} + \sqrt{١٢}\right)$

[٣] $\left(٣\sqrt{٥} - \sqrt{٧}\right)\left(٣\sqrt{٥} + \sqrt{٧}\right)$

[٤] $\left(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}\right)^{٢}$

[٥] $\left(\sqrt{٣} + \sqrt{٥}\right)^{٢} - \sqrt{٦٠}$

[٦] $\sqrt{١٨} - \frac{١٢}{\sqrt{٦}} + \sqrt{٢}\left(٢\sqrt{٣} - ٣\right)$

٦ اكتب كلًا مما يأتي بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

[١] $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$

[٢] $\sqrt{\frac{٥}{٣}}$

[٣] $\frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}$

[٤] $\frac{٤\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}{٢\sqrt{٣}}$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\frac{\sqrt{٦٣}}{\sqrt{٧}} =$ ....

(أ) ٣ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٩ (د) ± ٣

[٢] $\sqrt{٨} - \sqrt{٢} =$ ....

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ (د) ١

[٣] 📖 $\left(\sqrt{٨} + \sqrt{٢}\right)^{٢} =$ ....

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٨ (د) $\sqrt{١٨}$

[٤] 📖 $\left(\sqrt{٧} - \sqrt{٥}\right)\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٥}\right) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) $٢\sqrt{٧}$ (د) $-٢\sqrt{٥}$

[٥] $\sqrt{٥} + \sqrt{٥} = $ …………

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) $\sqrt{٢٠}$ (جـ) ٥ (د) ١٠

[٦] $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} = $ …………

(أ) ١ (ب) $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

[٧] $\frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt{٣}} \div \frac{\sqrt{٧٢}}{\sqrt{٢}} = $ …………

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٤

[٨] المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥٠}$ هو …………

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{١٠}$ (ب) $\frac{-\sqrt{٢}}{١٠}$ (جـ) $-٥\sqrt{٢}$ (د) $٥\sqrt{٢}$

[٩] إذا كانت : س $= \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢}}$ فإن : $س^{-١} = $ …………

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $٢\sqrt{٣}$

[١٠] إذا كانت : س $= \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$ ، ص $= \sqrt{٢٨} + \sqrt{١٢}$ فإن : س = …………

(أ) ص (ب) $\frac{١}{٢}$ ص (جـ) ٢ ص (د) $ص^{٢}$

---

٨ أكمل ما يأتى :

[١] $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢\sqrt{١٨}} = $ …………

[٢] $\sqrt{٣} \times \sqrt{٦} = ٣ \times $ …………

[٣] $\frac{١}{٢}\sqrt{٤٨} = ٢ \times $ …………

[٤] $\sqrt{٣\frac{٣}{٨}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{…………}}$

[٥] إذا كان : $٢\sqrt{٢٧} - ٢\sqrt{٤٨} = س\sqrt{٣}$ فإن : س = …………

[٦] $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ ، ………… (بنفس التسلسل)

[٧] إذا كانت : $س^{٢} = \frac{٨}{٩}$ فإن : س فى أبسط صورة = …………

[٨] إذا كانت : $س^{٢} = ٥$ فإن : $(س + \sqrt{٥})^{٢} = $ ………… أو …………

٩ أوجد قيمة كل من : س + ص ، س × ص فى كل من الحالات الآتية :

[١] س = ٣ + $\sqrt{٥}$ ، ص = -١ - $\sqrt{٥}$ «٤ ، -٢ - ٢$\sqrt{٥}$»

[٢] س = $\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$ «٢$\sqrt{٣}$ ، ١»

[٣] س = ٥ - ٣$\sqrt{٢}$ ، ص = ٥ - ٣$\sqrt{٢}$ «١٠ - ٦$\sqrt{٢}$ ، ٤٣ - ٣٠$\sqrt{٢}$»

---

١٠ إذا كانت : س = $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ، ص = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ فأوجد قيمة : ٦ (س + ص) «٥$\sqrt{٦}$»

---

١١ إذا كانت : س = ٢$\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٢}$ ، ص = ٢$\sqrt{٥}$ - $\sqrt{٢}$

فأوجد قيمة المقدار : س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} «٨٠»

للمتفوقين

١٢ إذا كان : أ^{س} = ٦ ، أ$^{-ص}$ = $\sqrt{٣}$ فأوجد قيمة : أ$^{س + ص}$  «٢$\sqrt{٣}$»

---

١٣ اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

[١] $\frac{(\sqrt{٥})^{٣} \times (\sqrt{٥})^{٥}}{(\sqrt{١٠})^{٦}}$ «$\frac{٥}{٨}$»

[٢] $\frac{٢\sqrt{٢} \times (\sqrt{٦})^{-٣}}{(\sqrt{٣})^{-٣}}$ «١»



الدرس 7 العـددان المترافقـان

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين موجبين :

فإن كلاً من العددين : $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$ يعتبر مرافقًا للعدد الآخر ويكون :

- مجموعهما = $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) + (\sqrt{أ} - \sqrt{ب}) = ٢\sqrt{أ}$ = ضعف الحد الأول

- حاصل ضربهما = $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})(\sqrt{أ} - \sqrt{ب}) = (\sqrt{أ})^٢ - (\sqrt{ب})^٢ = أ - ب$

مربع الحد الأول − مربع الحد الثانى

فمثلًا : $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$ مرافقه $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ ويكون :

- مجموعهما = $٢\sqrt{٣}$
- حاصل ضربهما = ٣ − ٢ = ١

! ملاحظة

حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عدد نسبى.

ملاحظة

إذا كان لدينا عدد حقيقى مقامه على الصورة : $\left(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}\right)$ أو $\left(\sqrt{أ} - \sqrt{ب}\right)$

فإننا نضعه فى أبسط صورة وذلك بضرب البسط والمقام فى مرافق المقام.

مثال ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ العدد : $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ فى أبسط صورة هو ....

(أ) $\sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٧} + \sqrt{٣}$ (جـ) $٤\sqrt{٧} - ٤\sqrt{٣}$ (د) $٤\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٣}$

٢ مرافق العدد : $\frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ هو ....

(أ) $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٣} - ٢$ (جـ) $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ (د) $\sqrt{٣} + ٢$

٣ المعكوس الضربى للعدد : $١ - \sqrt{٢}$ هو ....

(أ) $\sqrt{٢} - ١$ (ب) $١ - \sqrt{٢}$ (جـ) $-١ - \sqrt{٢}$ (د) $١ + \sqrt{٢}$

٤ إذا كان : $\frac{١}{س} = \sqrt{١٠} - ٣$ فإن : $س = $ ....

(أ) $\sqrt{١٠} + ٣$ (ب) $\sqrt{١٠} - ٣$ (جـ) $٣ - \sqrt{١٠}$ (د) $-٣ - \sqrt{١٠}$

الحـل

١ (ب) **تفسير الحل :** بضرب حدى العدد فى مرافق المقام وهو $\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)$

$$\therefore \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{٤\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)}{\left(\sqrt{٧}\right)^٢ - \left(\sqrt{٣}\right)^٢} = \frac{٤\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)}{٧ - ٣}$$

$$= \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$$

٢ (أ) **تفسير الحل :** بضرب حدى العدد فى مرافق المقام وهو $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

$$\therefore \frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{٣ - ٢} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$$

∴ مرافق العدد : $\frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ هو $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$

٣ (جـ) **تفسير الحل :** المعكوس الضربى للعدد : $١ - \sqrt{٢}$ هو $\frac{١}{١ - \sqrt{٢}}$

وبضرب حدى العدد فى مرافق المقام وهو $١ + \sqrt{٢}$

$$\therefore \frac{١}{١ - \sqrt{٢}} = \frac{١}{١ - \sqrt{٢}} \times \frac{١ + \sqrt{٢}}{١ + \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{١ + \sqrt{٢}}{١ - ٢} = \frac{١ + \sqrt{٢}}{-١} = -١ - \sqrt{٢}$$

٤ (أ) **تفسير الحل :** $س = \frac{١}{\sqrt{١٠} - ٣}$

$$\therefore س = \frac{١}{\sqrt{١٠} - ٣} \times \frac{\sqrt{١٠} + ٣}{\sqrt{١٠} + ٣} = \frac{\sqrt{١٠} + ٣}{١٠ - ٩} = \sqrt{١٠} + ٣$$

مثال ٢

إذا كان : $س = \frac{٤}{٢ - \sqrt{٢}}$ ، $ص = \frac{٣ - ٢\sqrt{٢}}{٣ + ٢\sqrt{٢}}$

فاكتب : كلاً من س ، ص بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا ، **ثم أوجد :** س + ص

الحل

$$س = \frac{٤}{٢ - \sqrt{٢}} \times \frac{٢ + \sqrt{٢}}{٢ + \sqrt{٢}} = \frac{٤\left(٢ + \sqrt{٢}\right)}{٤ - ٢} = \frac{٤\left(٢ + \sqrt{٢}\right)}{٢}$$

$$= ٢\left(٢ + \sqrt{٢}\right) = ٤ + ٢\sqrt{٢}$$

$$، ص = \frac{٣ - ٢\sqrt{٢}}{٣ + ٢\sqrt{٢}} \times \frac{٣ - ٢\sqrt{٢}}{٣ - ٢\sqrt{٢}} = \frac{\left(٣ - ٢\sqrt{٢}\right)^٢}{٩ - ٨} = \frac{٩ - ١٢\sqrt{٢} + ٨}{١} = ١٧ - ١٢\sqrt{٢}$$

$$\therefore س + ص = ٤ + ٢\sqrt{٢} + ١٧ - ١٢\sqrt{٢} = ٢١ - ١٠\sqrt{٢}$$

حاول بنفسك ١

اكتب كلًا مما يأتى بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا :

١ $\frac{١٢}{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}$

٢ $\frac{\sqrt{٨}}{٣ + ٢\sqrt{٢}}$

ملاحظات هامة من الضرب بمجرد النظر

• نعلم أن : $(س - ص)(س + ص) = س^٢ - ص^٢$

• كما نعلم أن :

$(س + ص)^٢ = س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$

ومنها :

* $س^٢ + س ص + ص^٢ = (س + ص)^٢ - س ص$

* $س^٢ + ص^٢ = (س + ص)^٢ - ٢ س ص$

$(س - ص)^٢ = س^٢ - ٢ س ص + ص^٢$

ومنها :

* $س^٢ - س ص + ص^٢ = (س - ص)^٢ + س ص$

* $س^٢ + ص^٢ = (س - ص)^٢ + ٢ س ص$

مثال ٣

إذا كانت : $س = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ فأثبت أن : س ، ص مترافقان.

ثم أوجد قيمة كل من :

١ $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$

٢ $س^٢ + س ص + ص^٢$

الحل

$\because س = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}} = \frac{٢\left(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}\right)}{٥ - ٣}$

$= \frac{٢\left(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}\right)}{٢} = \sqrt{٥} + \sqrt{٣}$

، $\because ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ $\therefore$ س ، ص مترافقان.

١ $\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢}$

$= (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})^{٢} + ٢\,(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣}) + (\sqrt{٥} - \sqrt{٣})^{٢}$

$= (٥ + ٢\sqrt{١٥} + ٣) + ٢\,(٥ - ٣) + (٥ - ٢\sqrt{١٥} + ٣)$

$= ٨ + ٢\sqrt{١٥} + ٤ + ٨ - ٢\sqrt{١٥} = ٢٠$

❁ حل آخر باستخدام الملاحظات السابقة :

حيث إن : $(\text{س} + \text{ص})^{٢} = \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢}$

$\therefore \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢} = [(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}) + (\sqrt{٥} - \sqrt{٣})]^{٢}$

$= (٢\sqrt{٥})^{٢} = ٤ \times ٥ = ٢٠$

٢ $\text{س}^{٢} + \text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢} = (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})^{٢} + (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣}) + (\sqrt{٥} - \sqrt{٣})^{٢}$

$= (٥ + ٣ + ٢\sqrt{١٥}) + (٢) + (٥ + ٣ - ٢\sqrt{١٥}) = ١٨$

❁ حل آخر باستخدام الملاحظات السابقة :

$\text{س}^{٢} + \text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢} = (\text{س} + \text{ص})^{٢} - \text{س}\,\text{ص}$

$= (\sqrt{٥} + \sqrt{٣} + \sqrt{٥} - \sqrt{٣})^{٢} - (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})$

$= (٢\sqrt{٥})^{٢} - ٢ = ٢٠ - ٢ = ١٨$

حاول بنفسك ٢

إذا كان : $\text{س} = \frac{٣}{٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥}}$ ، $\text{ص} = ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$ **فأوجد قيمة :** $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}$

على العددين المترافقين




• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات · أسئلة كتاب الوزارة

١ اكتب مرافق كل من الأعداد الآتية :

[١] $\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$ [٢] $٥ - ٢\sqrt{٧}$ [٣] $\sqrt{٥} + \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

٢ اجعل مقام كل مما يأتى عددًا نسبيًا :

[١] $\frac{٥}{\sqrt{٧} - \sqrt{٢}}$ [٢] $\frac{\sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}}$ [٣] $\frac{\sqrt{٧} + ٣}{\sqrt{٧} - ٣}$

٣ إذا كانت : $س = \frac{٢}{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}}$ ، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٥}$

أوجد قيمة : $(س + ص)^٢$ «٢٨»

٤ إذا كانت : $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$

فأوجد قيمة : $س^٢ ص^٢$ «١٦»

٥ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} + \sqrt{٣}$ فأثبت أن : $\frac{٤}{س} + ٢ س = ٤\sqrt{٥}$

٦ إذا كانت : $أ = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $ب = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة : $أ^٢ - ب^٢$ «$٤\sqrt{٦}$»

٧ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ ، $ص = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$

فأوجد قيمة : $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$ «٢٠»

٨ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، $ص = \frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد : $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢$ «٨»

٩ إذا كانت : س = ٣ + $\sqrt{٥}$ ، ص = $\frac{٤}{٣ + \sqrt{٥}}$ أثبت أن : س ، ص مترافقان

ثم أوجد : [١] حاصل ضربهما. [٢] س^{٢} + ص^{٢} «٤ ، ٢٨»

---

١٠ إذا كانت : س = $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$

أوجد قيمة : س^{٢} − س ص + ص^{٢} «١٤»

---

١١ إذا كانت : س = $\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار : $\frac{س + ص}{س ص - ١}$ «$\sqrt{٥}$»

---

١٢ إذا كانت : أ = $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، ب = $\frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$

أوجد قيمة : $\frac{أ - ب}{أ ب}$ «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

---

١٣ إذا كانت : س = ٢ $\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ ، ص = $\frac{٥}{\sqrt{٨} - \sqrt{٣}}$

أثبت أن : س ، ص عددان مترافقان واحسب قيمة : $\frac{س + ص}{س ص}$ «$\frac{٤\sqrt{٢}}{٥}$»

---

١٤ إذا كانت : س = $\frac{٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ ، ص = $\frac{٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

فأوجد قيمة : [١] س^{٢} + ص^{٢} [٢] س ص

ثم أثبت أن : س^{٢} + ص^{٢} = ٣٨ س ص «٣٨ ، ١»

---

١٥ إذا كانت : س = $\frac{١}{٢ + \sqrt{٣}}$ ، ص = $\frac{١٢}{\sqrt{٣}}$

أوجد قيمة المقدار : س^{٢} + ص «٧»

---

١٦ إذا كانت : س = $\frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ ، ص هى المعكوس الضربى للعدد س

فأوجد : ص ثم أثبت أن : (س + ص)^{٢} = ١٢ «$\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$»



١٧ **إذا كانت :** $س = \sqrt{١٣} + \sqrt{٦}$ ، $س ص = ١$

فأوجد قيمة : $س^٢ - ٤٩ ص^٢$ «$٤\sqrt{٧٨}$»

---

١٨ **إذا كانت :** $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص^{-١} = \frac{١}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة : $س^٢ ص^٢$ «١٦»

تذكر أن

$ص^{-١} = \frac{١}{ص}$

---

١٩ **إذا كانت :** $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، $ص = \frac{٢}{س}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار : $\frac{س + ص}{س ص}$ «$\sqrt{٧}$»

---

٢٠ **إذا كانت :** $س = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٥}}{\sqrt{٦} - \sqrt{٥}}$ **فأثبت أن :** $س + \frac{١}{س} = ٢٢$

---

٢١ **أكمل ما يأتى :**

[١] $(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}) = $ ....

[٢] إذا كانت : $س = ٣ + \sqrt{٢}$ فإن مرافقها .... وحاصل ضربهما ....

[٣] العدد المرافق للعدد $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ هو ....

[٤] مرافق العدد $١ + \frac{٧}{\sqrt{٧}}$ فى أبسط صورة هو ....

[٥] المعكوس الضربى للعدد $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ فى أبسط صورة هو ....

[٦] إذا كانت : $س = ٢ + \sqrt{٥}$ ، ص العدد المرافق للعدد س فإن : $(س - ص)^٢ = $ ....

[٧] إذا كان : $\frac{س}{٥ - \sqrt{٥}} = ٥ + \sqrt{٥}$ فإن : قيمة س فى أبسط صورة هى ....

[٨] إذا كانت : $\frac{١}{س} = \sqrt{٥} - ٢$ فإن : قيمة س فى أبسط صورة هى ....

[٩] إذا كانت : $س = \sqrt{٣} + ٢$ ، $ص = \sqrt{٣} - ٢$ فإن : (س ص ، س + ص) = ...

[١٠] $(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})^{-٩} (\sqrt{٢} - \sqrt{٣})^{-٩} = $ ....

٢٢ في كل مما يأتي إذا كان ٲ ، ب عددين صحيحين فأوجد قيمة كل منهما :

(١) $\frac{١١}{٢\sqrt{٥} + ٣} = ٲ\sqrt{٥} + ب$ «٢ ، −٣»

(٢) $\frac{٣}{٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥}} = ٲ\sqrt{٢} + ب\sqrt{٥}$ «٢ ، ١»

(٣) $\frac{٧}{\sqrt{٨} + ١} = ٲ + ب\sqrt{٢}$ «−١ ، ٢»

للمتفوقين

٢٣ إذا كانت : $س = \sqrt{٤ + \sqrt{٧}}$ ، $ص = \sqrt{٤ - \sqrt{٧}}$

أوجد فى أبسط صورة : $(س + ص)^{٢}$ «١٤»

٢٤ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} + ١$ ، $ص = \sqrt{٥} - ١$

فأوجد قيمة : $س ص^{-١} + ص س^{-١}$ «٣»

٢٥ إذا كان : $\frac{س}{ص} = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ أوجد قيمة : $\frac{٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢}}{س ص}$ «$٦\sqrt{٣}$»

٢٦ إذا كانت : $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٦}$ ، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٦}$

فأوجد قيمة : $\frac{س^{٨} ص^{٩} - ص}{(س + ص)^{٥}}$ «صفر»

عجائب الأرقام

• اختر أى عدد موجب مكون من رقمين.
• اطرح منه مجموع رقميه.
• هل باقى الطرح يقبل القسمة على ٩ ؟
كرر مع أعداد أخرى





الدرس 8 العمليات على الجذور التكعيبية

* إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

١ $\sqrt[3]{\text{أ}} \times \sqrt[3]{\text{ب}} = \sqrt[3]{\text{أب}}$

فمثلًا :

- $\sqrt[3]{٣} \times \sqrt[3]{٩} = \sqrt[3]{٣ \times ٩} = \sqrt[3]{٢٧} = ٣$
- $\sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{-٤} = \sqrt[3]{٢ \times (-٤)} = \sqrt[3]{-٨} = -٢$
- $\sqrt[3]{١٦} = \sqrt[3]{٨ \times ٢} = \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٢} = ٢\sqrt[3]{٢}$
- $\sqrt[3]{-٥٤} = \sqrt[3]{-٢٧ \times ٢} = \sqrt[3]{-٢٧} \times \sqrt[3]{٢} = -٣\sqrt[3]{٢}$

٢ $\frac{\sqrt[3]{\text{أ}}}{\sqrt[3]{\text{ب}}} = \sqrt[3]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$ (حيث ب $\neq ٠$)

فمثلًا :

- $\frac{\sqrt[3]{٣٢}}{\sqrt[3]{٤}} = \sqrt[3]{\frac{٣٢}{٤}} = \sqrt[3]{٨} = ٢$
- $\frac{\sqrt[3]{٥٤}}{\sqrt[3]{-٢}} = \sqrt[3]{-\frac{٥٤}{٢}} = \sqrt[3]{-٢٧} = -٣$
- $\sqrt[3]{\frac{٨}{١٢٥}} = \frac{\sqrt[3]{٨}}{\sqrt[3]{١٢٥}} = \frac{٢}{٥}$
- $\sqrt[3]{-\frac{٢٧}{٦٤}} = \frac{\sqrt[3]{-٢٧}}{\sqrt[3]{٦٤}} = -\frac{٣}{٤}$

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\sqrt[3]{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt[3]{\frac{٤}{٩}}$ ٢ $\sqrt[3]{\frac{٥}{٤}} \div \sqrt[3]{\frac{٢}{٢٥}}$

الحل

١ $\sqrt[3]{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt[3]{\frac{٤}{٩}} = \sqrt[3]{\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٩}} = \sqrt[3]{\frac{٨}{٢٧}} = \frac{\sqrt[3]{٨}}{\sqrt[3]{٢٧}} = \frac{٢}{٣}$

٢ $\sqrt[3]{\frac{٥}{٤}} \div \sqrt[3]{\frac{٢}{٢٥}} = \sqrt[3]{\frac{٥}{٤} \div \frac{٢}{٢٥}} = \sqrt[3]{\frac{٥}{٤} \times \frac{٢٥}{٢}} = \sqrt[3]{\frac{١٢٥}{٨}} = \frac{\sqrt[3]{١٢٥}}{\sqrt[3]{٨}} = \frac{٥}{٢}$

! ملاحظات

* إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

١ $\sqrt[3]{أ^٣ + ب^٣} \neq أ + ب$ ، $\sqrt[3]{أ^٣ - ب^٣} \neq أ - ب$

٢ $\sqrt[3]{-أ} = -\sqrt[3]{أ}$

٣ $أ \sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{أ^٣ ب}$

فمثلًا : • $٣ \sqrt[3]{\frac{١}{٩}} = \sqrt[3]{٢٧ \times \frac{١}{٩}} = \sqrt[3]{٣}$

• $٨ \sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = ٤ \times ٢ \sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = ٤ \sqrt[3]{٨ \times \frac{١}{٤}} = ٤ \sqrt[3]{٢}$

٤ $\sqrt[3]{\frac{أ}{ب}} = \sqrt[3]{\frac{أ}{ب} \times \frac{ب^٢}{ب^٢}} = \sqrt[3]{\frac{أ ب^٢}{ب^٣}} = \frac{١}{ب} \sqrt[3]{أ ب^٢}$ (حيث : ب ≠ ٠)

فمثلًا : $\sqrt[3]{\frac{١}{٣}} = \sqrt[3]{\frac{١}{٣} \times \frac{٩}{٩}} = \sqrt[3]{\frac{٩}{٢٧}} = \frac{١}{٣} \sqrt[3]{٩}$

مثال ٢

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

١ $\sqrt[3]{٢٤} + \sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٨١}$

٢ $\sqrt[3]{٥٤} + ٦ \sqrt[3]{١٦} - ٦ \sqrt[3]{\frac{١}{٤}}$

٣ $\sqrt[3]{٨١} + \sqrt{١٢} - ٢ \sqrt[3]{٣} - ٢ \sqrt{٣}$

الحـــل

١

$$\sqrt[3]{٢٤} + \sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٨١} = \sqrt[3]{٨ \times ٣} + \sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٢٧ \times ٣}$$

$$= \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٣} + \sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٢٧} \times \sqrt[3]{٣}$$

$$= ٢\sqrt[3]{٣} + \sqrt[3]{٣} - ٣\sqrt[3]{٣} = \text{صفر}$$

٢

$$\sqrt[3]{٥٤} + ٦\sqrt[3]{١٦} - ٦\sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = \sqrt[3]{٢٧ \times ٢} + ٦\sqrt[3]{٨ \times ٢} - ٣ \times ٢\sqrt[3]{\frac{١}{٤}}$$

$$= \sqrt[3]{٢٧} \times \sqrt[3]{٢} + ٦ \times \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٢} - ٣ \times \sqrt[3]{٨ \times \frac{١}{٤}}$$

$$= ٣ \times \sqrt[3]{٢} + ٦ \times ٢ \times \sqrt[3]{٢} - ٣\sqrt[3]{٢}$$

$$= ٣\sqrt[3]{٢} + ١٢\sqrt[3]{٢} - ٣\sqrt[3]{٢} = ١٢\sqrt[3]{٢}$$

حل آخر :

$$\because \sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = \sqrt[3]{\frac{١}{٤} \times \frac{١٦}{١٦}} = \sqrt[3]{\frac{١٦}{٦٤}} = \frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٦٤}} = \frac{١}{٤}\sqrt[3]{١٦}$$

$$= \frac{١}{٤}\sqrt[3]{٨ \times ٢} = \frac{١}{٤} \times ٢\sqrt[3]{٢} = \frac{١}{٢}\sqrt[3]{٢}$$

$$\therefore \sqrt[3]{٥٤} + ٦\sqrt[3]{١٦} - ٦\sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = ٣\sqrt[3]{٢} + ٦ \times ٢\sqrt[3]{٢} - ٦ \times \frac{١}{٢}\sqrt[3]{٢}$$

$$= ٣\sqrt[3]{٢} + ١٢\sqrt[3]{٢} - ٣\sqrt[3]{٢} = ١٢\sqrt[3]{٢}$$

حل ثالث :

$$\because ٦\sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = \sqrt[3]{٦^{٣} \times \frac{١}{٤}} = \sqrt[3]{٥٤}$$

$$\therefore \sqrt[3]{٥٤} + ٦\sqrt[3]{١٦} - ٦\sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = \sqrt[3]{٥٤} + ٦\sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٥٤}$$

$$= ٦\sqrt[3]{١٦} = ٦ \times ٢\sqrt[3]{٢} = ١٢\sqrt[3]{٢}$$

٣

$$\sqrt[3]{٨١} + \sqrt{١٢} - ٢\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt{٣} = \sqrt[3]{٢٧ \times ٣} + \sqrt{٤ \times ٣} - ٢\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt{٣}$$

$$= \sqrt[3]{٢٧} \times \sqrt[3]{٣} + \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} - ٢\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt{٣}$$

$$= ٣\sqrt[3]{٣} + ٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt{٣} = \sqrt[3]{٣}$$

مثال ٣

أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة : $٢\sqrt[٣]{٤}\left(٥\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} - \sqrt[٣]{٣٢}\right)$

الحل

$$٢\sqrt[٣]{٤}\left(٥\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} - \sqrt[٣]{٣٢}\right) = ٢ \times ٥ \times \sqrt[٣]{٤ \times \frac{١}{٢}} - ٢ \times \sqrt[٣]{٤ \times ٣٢}$$

$$= ١٠\sqrt[٣]{٢} - ٢\sqrt[٣]{١٢٨} = ١٠\sqrt[٣]{٢} - ٢\sqrt[٣]{٦٤ \times ٢}$$

$$= ١٠\sqrt[٣]{٢} - ٢ \times ٤\sqrt[٣]{٢} = ١٠\sqrt[٣]{٢} - ٨\sqrt[٣]{٢} = ٢\sqrt[٣]{٢}$$

مثال ٤

إذا كانت : $\text{س} = \sqrt[٣]{٥} + ٢$ ، $\text{ص} = \sqrt[٣]{٥} - ٢$

فأوجد قيمة : $(\text{س} + \text{ص})^٣ - (\text{س} - \text{ص})^٣$

الحل

$\because \text{س} + \text{ص} = \sqrt[٣]{٥} + ٢ + \sqrt[٣]{٥} - ٢ = ٢\sqrt[٣]{٥}$

، $\text{س} - \text{ص} = \sqrt[٣]{٥} + ٢ - \left(\sqrt[٣]{٥} - ٢\right) = \sqrt[٣]{٥} + ٢ - \sqrt[٣]{٥} + ٢ = ٤$

$\therefore (\text{س} + \text{ص})^٣ - (\text{س} - \text{ص})^٣ = \left(٢\sqrt[٣]{٥}\right)^٣ - (٤)^٣$

$= ٢^٣ \times \left(\sqrt[٣]{٥}\right)^٣ - (٤)^٣$

$= ٨ \times ٥ - ٦٤ = ٤٠ - ٦٤ = -٢٤$

حاول بنفسك

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

(١) $٥\sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{-٥٤}$

(٢) $\sqrt[٣]{٧٢} + \sqrt[٣]{\frac{١}{٣}} + \sqrt[٣]{-٩}$

تمارين

8 على العمليات على الجذور التكعيبية





اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات • أسئلة كتاب الوزارة

١ ضع كلًا مما يأتى على صورة $أ\sqrt[3]{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة موجبة ممكنة :

[١] $\sqrt[3]{١٦}$ | [٢] $\sqrt[3]{-٥٤}$ | [٣] $٢\sqrt[3]{٢٥٠}$

[٤] $\frac{٢}{٣}\sqrt[3]{-١٣٥}$ | [٥] $٣\sqrt[3]{\frac{١}{٣}}$ | [٦] $-١٠\sqrt[3]{\frac{٢}{٥}}$

---

٢ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

[١] $\sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٣٢}$ | [٢] $\frac{\sqrt[3]{٧٢}}{\sqrt[3]{٩}}$ | [٣] $\frac{٤\sqrt[3]{-٥٤}}{٢\sqrt[3]{-٢}}$

[٤] $\frac{١}{٢}\sqrt[3]{١٠} \times ٦\sqrt[3]{١٠٠}$ | [٥] $\sqrt[3]{\frac{٢}{٥}} \times \sqrt[3]{\frac{٤}{٢٥}}$ | [٦] $\sqrt[3]{\frac{٣}{٤}} \div \sqrt[3]{\frac{٢}{٩}}$

---

٣ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

[١] $\sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٢}$ «$\sqrt[3]{٢}$»

[٢] $\sqrt[3]{١٢٥} - \sqrt[3]{٢٤}$ «$٥ - ٢\sqrt[3]{٣}$»

[٣] $\sqrt[3]{٨١} + \sqrt[3]{-٢٤}$ «$\sqrt[3]{٣}$»

[٤] $\sqrt[3]{٥٤} + \sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٢٥٠}$ «صفر»

[٥] $٢\sqrt[3]{٥٤} - ٥\sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{١٦}$ «$٣\sqrt[3]{٢}$»

[٦] $\sqrt[3]{١٦} - \frac{١}{٣}\sqrt[3]{٥٤} + \sqrt[3]{-٢}$ «صفر»

[٧] $\sqrt[3]{١٦} + \sqrt[3]{١٠} \times \sqrt[3]{٢٥}$ «$٧\sqrt[3]{٢}$»

[٨] $\sqrt[3]{٢٤} - ٦\sqrt[3]{١٣\frac{٨}{٩}}$ «$-٨\sqrt[3]{٣}$»

---

٤ أثبت أن :

[١] $\sqrt[3]{١٢٨} + \sqrt[3]{١٦} - ٢\sqrt[3]{٥٤} =$ صفر

[٢] $\sqrt[3]{٥٤} \times \sqrt[3]{١٦} \div \left(\sqrt[3]{٤} \times ٦\right) = ١$

٥ **اختصر كلًّا مما يأتي إلى أبسط صورة :**

[١] $\sqrt[3]{٨١} + \sqrt[3]{-٢٤} - ٣\sqrt[3]{\frac{١}{٩}}$ «صفر»

[٢] $\sqrt[3]{٥٤} + ٨\sqrt[3]{-\frac{١}{٤}} + ٥\sqrt[3]{١٦}$ «$٩\sqrt[3]{٢}$»

[٣] $\sqrt[3]{١٠٨} - ٢\sqrt[3]{٤} - \sqrt[3]{\frac{١}{٢}}$ «$\frac{١}{٢}\sqrt[3]{٤}$»

[٤] $\sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٤} \times \sqrt[3]{٦} + ٣\sqrt[3]{\frac{١}{٩}}$ «صفر»

---

٦ **اختصر كلًّا مما يأتي إلى أبسط صورة :**

[١] $\frac{٧}{٣}\sqrt{١٨} + \sqrt[3]{٥٤} - ٧\sqrt{٢} + \sqrt[3]{١٦}$ «$٥\sqrt[3]{٢}$»

[٢] $\sqrt{٢٧} + \frac{١}{٣}\sqrt[3]{٢٧} - ٩\sqrt{\frac{١}{٣}} - ١$ «صفر»

[٣] $\sqrt[3]{-١٦} + \frac{١٤}{\sqrt{٧}} - \sqrt{٢٨} + \sqrt[3]{٥٤}$ «$\sqrt[3]{٢}$»

[٤] $\sqrt{١٨} + \sqrt[3]{٥٤} - \frac{\sqrt{٢١٦}}{\sqrt{١٢}} - \sqrt[3]{١٦}$ «$\sqrt[3]{٢}$»

[٥] $٥\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٠٠} + \left(\sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٢٥}\right)$ «٥»

---

٧ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

[١] $\sqrt[3]{٥٤} + \sqrt[3]{-٢} =$ ....

(أ) $\sqrt[3]{٥٢}$ (ب) $\sqrt[3]{٢}$ (جـ) $٢\sqrt[3]{٢}$ (د) $٤\sqrt[3]{٢}$

[٢] $\sqrt[3]{-٦٤} + \sqrt{١٦} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) −٨ (د) ±٨

[٣] $\frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٢}} =$ ....

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) $٢\sqrt[3]{٢}$

[٤] $\sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{٢} = $ ....

(أ) $\sqrt[3]{٢}$ (ب) $\sqrt[3]{٤}$ (جـ) $\sqrt[3]{٨}$ (د) $\sqrt[3]{١٦}$

[٥] $\sqrt[3]{\frac{٢}{٩}} = $ ....

(أ) $\frac{\sqrt[3]{٦}}{٣}$ (ب) $\sqrt[3]{\frac{١}{٦}}$ (جـ) $\sqrt[3]{٦}$ (د) $\sqrt[3]{٢}$

---

٨ أكمل ما يأتى :

[١] $\sqrt[3]{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt[3]{-١٢} = $ ....

[٢] $\sqrt[3]{٣} \times \sqrt[3]{٩} = \sqrt{\text{............}}$

[٣] $\sqrt[3]{٥٤} - \sqrt[3]{-١٦} = \sqrt[3]{\text{............}}$

[٤] $\frac{١}{٢}\sqrt[3]{٥٦} - \sqrt[3]{\frac{٧}{٢٧}} = $ ....

[٥] إذا كانت : $س = ٢$ ، $ص = \sqrt[3]{-١٦}$ فإن : $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٣} = $ ....

[٦] $\frac{\sqrt[3]{٢٥٠} - \sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٥٤}} = $ ....

---

٩ إذا كانت : $أ = \sqrt[3]{٥} + ١$ ، $ب = \sqrt[3]{٥} - ١$ احسب قيمة كل من :

[١] $(أ - ب)^{٥}$ [٢] $(أ + ب)^{٣}$ «٣٢ ، ٤٠»

---

١٠ إذا كانت : $س = ٣ + \sqrt[3]{٦}$ ، $ص = ٣ - \sqrt[3]{٦}$ فأوجد قيمة : $\left(\frac{س - ص}{س + ص}\right)^{٣}$ «$\frac{٢}{٩}$»

للمتفوقين

١١ إذا كانت : $س = \sqrt[3]{٢} + ١$ ، $ص = \sqrt[3]{٢} - ١$ فأثبت أن : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢\sqrt[3]{٤} + ٢$

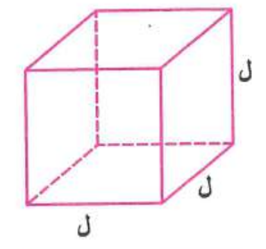
---

١٢ اجعل مقام ما يأتى عددًا نسبيًا : $\frac{٢}{\sqrt[3]{٢}}$



الدرس 9 تطبيقات على الأعداد الحقيقية

المكعب



هو مجسم جميع أوجهه الستة عبارة عن مربعات متطابقة
أى أن جميع أحرفه متساوية فى الطول.
وبفرض أن طول حرف المكعب = ل وحدة طولية فإن :

١ مساحة كل وجه = ل^{٢} وحدة مربعة.
٢ مساحته الجانبية = ٤ ل^{٢} وحدة مربعة.
٣ مساحته الكلية (مساحة أوجهه الستة) = ٦ ل^{٢} وحدة مربعة.
٤ حجمه = ل^{٣} وحدة مكعبة.

مثال ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مكعب حجمه ٦٤ سم^{٣} فإن مجموع أطوال أحرفه يساوى ....
(أ) ١٦ سم (ب) ٣٢ سم (جـ) ٤٨ سم (د) ٦٤ سم

٢ مكعب حجمه ١٢٥ سم^{٣} فإن مساحته الكلية تساوى ....
(أ) ٢٠٠ سم^{٢} (ب) ١٥٠ سم^{٢} (جـ) ١٢٥ سم^{٢} (د) ٢٥ سم^{٢}

٣ مكعب حجمه ٢١٦ سم^{٣} فإن مساحته الجانبية تساوى ....

(أ) ٣٦ سم^{٢} (ب) ٧٢ سم^{٢} (جـ) ١٤٤ سم^{٢} (د) ٢١٦ سم^{٢}

٤ مكعب مساحته الجانبية ٤ سم^{٢} فإن حجمه يساوى ....

(أ) ١ سم^{٣} (ب) ٢ سم^{٣} (جـ) ٤ سم^{٣} (د) ١٦ سم^{٣}

٥ مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^{٢} فإن مساحته الجانبية تساوى ....

(أ) ٢٨ سم^{٢} (ب) ٤٩ سم^{٢} (جـ) ١٩٦ سم^{٢} (د) ٣٤٣ سم^{٢}

الحل

١ (جـ) **تفسير الحل :** ∵ حجم المكعب = ل^{٣} حيث ل طول حرفه

∴ ل^{٣} = ٦٤ ∴ ل = $\sqrt[3]{٦٤}$ = ٤ سم

∴ مجموع أطوال أحرف المكعب = ١٢ ل = ١٢ × ٤ = ٤٨ سم

٢ (ب) **تفسير الحل :** ∵ حجم المكعب = ل^{٣} حيث ل طول حرفه

∴ ل^{٣} = ١٢٥ ∴ ل = $\sqrt[3]{١٢٥}$ = ٥ سم

∴ مساحة المكعب الكلية = ٦ ل^{٢} = ٦ × ٥^{٢} = ١٥٠ سم^{٢}

٣ (جـ) **تفسير الحل :** ∵ حجم المكعب = ل^{٣} حيث ل طول حرفه

∴ ل^{٣} = ٢١٦ ∴ ل = $\sqrt[3]{٢١٦}$ = ٦ سم

∴ مساحة المكعب الجانبية = ٤ ل^{٢} = ٤ × ٦^{٢} = ١٤٤ سم^{٢}

٤ (أ) **تفسير الحل :** ∵ المساحة الجانبية للمكعب = ٤ ل^{٢} حيث ل طول حرفه

∴ ٤ ل^{٢} = ٤ ∴ ل^{٢} = ١

∴ ل = $\sqrt{١}$ = ١ سم ∴ حجم المكعب = ل^{٣} = ١^{٣} = ١ سم^{٣}

٥ (جـ) **تفسير الحل :** ∵ المساحة الكلية للمكعب = ٦ ل^{٢} حيث ل طول حرفه

∴ ٦ ل^{٢} = ٢٩٤ ∴ ل^{٢} = $\frac{٢٩٤}{٦}$ = ٤٩

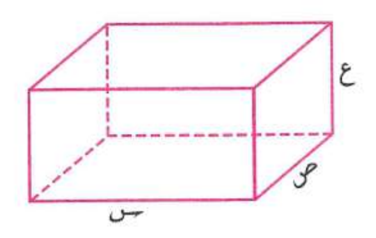
∴ المساحة الجانبية للمكعب = ٤ ل^{٢} = ٤ × ٤٩ = ١٩٦ سم^{٢}

حاول بنفسك 1

أكمل الجدول التالى :

	طول حرف المكعب	مساحة الوجه الواحد	مساحته الجانبية	مساحته الكلية	الحجم
١	٣ سم	....	....	....	....
٢	....	٤٩ سم^٢	....	....	....
٣	....	....	١٤٤ سم^٢	....	....
٤	....	....	....	١٥٠ سم^٢	....
٥	....	....	....	....	٦٤ سم^٣

متوازى المستطيلات



هو مجسم يحتوى على ستة أوجه مستطيلة

وكل وجهين متقابلين منها متطابقان.

وبفرض أن أطوال أحرف متوازى المستطيلات

هى س ، ص ، ع وحدة طولية فإن :

١ مساحته الجانبية = محيط قاعدته × ارتفاعه = ٢ (س + ص) × ع وحدة مربعة.

٢ مساحته الكلية (مساحة أوجهه الستة) = مساحته الجانبية + ضعف مساحة قاعدته

= ٢ (س + ص) × ع + ٢ س ص

= ٢ (س ص + ص ع + ع س) وحدة مربعة.

٣ حجمه = مساحة قاعدته × ارتفاعه = س × ص × ع وحدة مكعبة.

ملاحظتان

- قد يحتوى متوازى المستطيلات على وجهين متقابلين كل منهما عبارة عن مربع.
- المكعب هو حالة خاصة من متوازى المستطيلات ،
 فهو متوازى مستطيلات أطوال أحرفه متساوية.

مثال ٢

متوازى مستطيلات ارتفاعه ٤ سم وقاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها ٥ سم أوجد :

١ حجمه.

٢ مساحته الجانبية.

٣ مساحته الكلية.

الحل

١ حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ٥ × ٥ × ٤ = ١٠٠ سم^{٣}

٢ مساحة متوازى المستطيلات الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٤ × ٥ × ٤ = ٨٠ سم^{٢}

٣ مساحة متوازى المستطيلات الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة قاعدته

= ٨٠ + ٢ × ٢٥ = ١٣٠ سم^{٢}

حاول بنفسك ٢

متوازى مستطيلات أبعاده ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم

احسب حجمه ومساحته الكلية.

الدائــــرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق فإن :

1. محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طولية.
2. مساحة الدائرة = π نق^{٢} وحدة مربعة.



مثال ٣

دائرة مساحتها ٢٥ π سم^{٢}. احسب محيطها بدلالة π

الحـــل

∵ مساحة الدائرة = π نق^{٢} ∴ π نق^{٢} = ٢٥ π

∴ نق^{٢} = ٢٥ ∴ نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

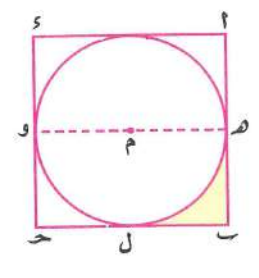
∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٥ × π = ١٠ π سم

مثال ٤

في الشكل المقابل :

دائرة م مرسومة داخل مربع فإذا كانت مساحة المربع ١٩٦ سم^{٢}

فأوجد :



1. مساحة الجزء المظلل.
2. محيط الجزء المظلل.

الحـــل

∵ مساحة المربع = ١٩٦ سم^{٢} ∴ طول ضلع المربع = $\sqrt{١٩٦}$ = ١٤ سم

، ∵ طول ضلع المربع = ٢ نق ∴ ١٤ = ٢ نق ∴ نق = ٧ سم

١ مساحة الجزء المظلل = (مساحة المربع − مساحة الدائرة) ÷ ٤

$= \left(١٩٦ - \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٧\right) \div ٤ = ٤٢ \div ٤ = ١٠,٥$ سم^٢

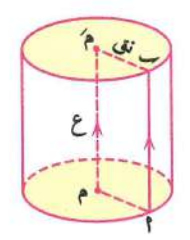
٢ محيط الجزء المظلل = ب هـ + ب ل + $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة

$= ٧ + ٧ + \left(\frac{١}{٤} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧\right) = ١٤ + ١١ = ٢٥$ سم

حاول بنفسك ٣

دائرة محيطها ٨٨ سم ، أوجد مساحتها. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

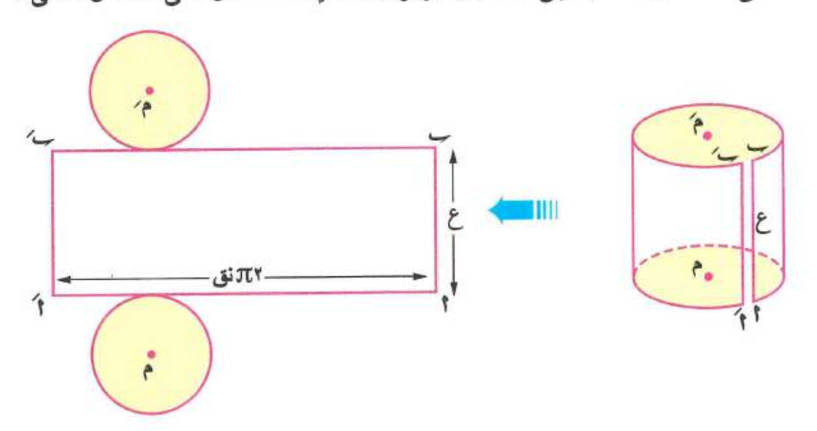
الأسطوانة الدائرية القائمة



• هى مجسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرة مستوى ، أما السطح الجانبى فهو سطح منحنٍ يسمى سطح أسطوانى.

• والقطعة المستقيمة $\overline{مَمَ}$ المرسومة بين مركزى القاعدتين تكون عمودية على مستوى كل من القاعدتين وتُسمى ارتفاع الأسطوانة.

• إذا رسمنا $\overline{أب}$ على السطح الأسطوانى بحيث أ ∈ الدائرة م ، ب ∈ الدائرة مَ ، $\overline{أب}$ // $\overline{مَمَ}$ وقطعنا سطح الأسطوانة الجانبى عند $\overline{أب}$ وفردناها فإننا نحصل على الشكل الآتى :



وهو يتكون من سطح مستطيل أ ب بَ أَ وهو نفس السطح الأسطوانى ، بالإضافة إلى سطحى دائرتين هما قاعدتا الأسطوانة ويكون : أ ب = ارتفاع الأسطوانة ، أ أَ = محيط قاعدة الأسطوانة

∴ المساحة الجانبية للأسطوانة = مساحة المستطيل أ ب ب َ أ َ

= أ أ َ × أ ب = محيط قاعدة الأسطوانة × ارتفاعها

وإذا فرضنا أن : طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق ، ارتفاعها = ع فإن :

1. المساحة الجانبية للأسطوانة = ٢ π نق ع وحدة مربعة.
2. المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية للأسطوانة + ضعف مساحة القاعدة
= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} وحدة مربعة.
3. حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع = π نق^{٢} ع وحدة مكعبة.

مثال ٥

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم ، وحجمها ١٥٤٠ سم^{٣} أوجد مساحتها الكلية ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل

∵ حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

∴ ١٥٤٠ = $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢} × ١٠

∴ ١٥٤٠ = $\frac{٢٢٠}{٧}$ نق^{٢}

∴ نق^{٢} = ١٥٤٠ × $\frac{٧}{٢٢٠}$ = ٤٩

∴ نق = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ سم

∴ المساحة الكلية للأسطوانة = ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ١٠ + ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧^{٢}

= ٤٤٠ + ٣٠٨ = ٧٤٨ سم^{٢}

حاول بنفسك ٤

أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π سم^{٣} وارتفاعها ١٠ سم أوجد طول قطر قاعدتها.

الكـــــرة



- هي مجسم سطحه منحنى وجميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة داخل الكرة.

* تسمى هذه الأبعاد المتساوية : طول نصف قطر الكرة.

* تسمى النقطة الثابتة : مركز الكرة.

- إذا قُطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع الناتج يكون عبارة عن دائرة مركزها هو مركز الكرة وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة.

وبفرض أن طول نصف قطر الكرة = نق فإن :

(١) مساحة الكرة = ٤ π نق^{٢} وحدة مربعة.

(٢) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} وحدة مكعبة.

مثال ٦

كرة حجمها $\frac{٥٠٠}{٣}$ π سم^{٣} ، أوجد طول قطرها.

الحـــل

$\because$ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} $\therefore$ $\frac{٥٠٠}{٣}$ π = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$\therefore$ نق^{٣} = $\frac{٥٠٠}{٣}$ × $\frac{٣}{٤}$ = ١٢٥ $\therefore$ نق = $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥ سم

$\therefore$ طول قطر الكرة = ٢ × ٥ = ١٠ سم

مثال ٧

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٦ سم وحجمها $\frac{٢}{٣}$ حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم.

أوجد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة.

الحـــل

بفرض أن : طول نصف قطر الكرة نق$_1$ سم ، طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة نق$_2$ سم

، ∵ حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق$_1^3$ = $\frac{4}{3}$ π × ٣^3 = ٣٦ π سم^3

، ∵ حجم الأسطوانة = $\frac{2}{3}$ حجم الكرة ∴ π نق$_2^2$ ع = $\frac{2}{3}$ × ٣٦ π

∴ نق$_2^2$ × ٦ = ٢٤ ∴ نق$_2^2$ = ٤

∴ نق$_2$ = $\sqrt{4}$ = ٢ سم ∴ طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = ٢ سم

حاول بنفسك ٥

كرة مساحتها ٣٦ π سم^2 أوجد حجمها بدلالة π

الجدول التالى يلخص قواعد حساب مساحات وحجوم بعض المجسمات :

المجسم		المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المكعب	ل ، ل ، ل	٤ ل^2	٦ ل^2	ل^3
متوازى المستطيلات	ع ، ص ، س	٢ (س + ص) × ع	٢ (س ص + ص ع + ع س)	س × ص × ع
الأسطوانة الدائرية القائمة	ع ، نق	٢ π نق ع	٢ π نق ع + ٢ π نق^2 = ٢ π نق (ع + نق)	π نق^2 ع
الكرة	نق	–	٤ π نق^2	$\frac{4}{3}$ π نق^3

تمارين 9

تطبيقات على الأعداد الحقيقية



اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات أسئلة كتاب الوزارة

المكعب

١ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كان طول حرف مكعب ٥ سم فإن حجمه = ………… سم^{٣}

[٢] مكعب طول حرفه ٤ سم فإن مساحته الكلية = ………… سم^{٢}

[٣] المساحة الجانبية لمكعب طول حرفه ل سم = ………… سم^{٢}

[٤] مكعب حجمه ل^{٣} سم^{٣} فإن مساحته الكلية = ………… سم^{٢}

[٥] المكعب الذى طول حرفه = ٢ ل سم فإن حجمه = ………… سم^{٣}

٢ مكعب مساحته الجانبية ٣٦ سم^{٢} أوجد :

[١] مساحته الكلية. [٢] حجمه. «٥٤ سم^{٢} ، ٢٧ سم^{٣}»

٣ مكعب محيط أحد أوجهه ١٢ سم أوجد :

[١] حجمه. [٢] مساحته الجانبية. «٢٧ سم^{٣} ، ٣٦ سم^{٢}»

٤ مكعب مجموع أطوال أحرفه ٦٠ سم أوجد :

[١] حجمه. [٢] مساحته الكلية. «١٢٥ سم^{٣} ، ١٥٠ سم^{٢}»

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] مكعب حجمه ١ سم^{٣} فإن مجموع أطوال أحرفه = ………… سم

(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

[٢] مكعب حجمه ٦٤ سم^{٣} فإن مساحته الجانبية = ………… سم^{٢}

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦٤ (د) ٩٦

[٣] مكعب حجمه ٢٧ سم^{٣} فإن مساحته الكلية = ………… سم^{٢}

(أ) ٩ (ب) ٢٧ (جـ) ٣٦ (د) ٥٤

[٤] إذا كانت المساحة الكلية لمكعب = ٩٦ سم^{٢} فإن مساحة الوجه الواحد = ………… سم^{٢}

(أ) ١٦ (ب) ٦٤ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

٥ مكعب مساحته الكلية = ١٥٠ سم^{٢} فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٢٥ (ب) ١٠٠ (جـ) ١٢٥ (د) ١٥٠

٦ إذا كانت مساحة الأوجه الستة لمكعب = ٥٤ سم^{٢} فإن حجمه = ... سم^{٣}

(أ) ٥٤ (ب) ٤٤ (جـ) ٧٢ (د) ٢٧

٧ إذا كان حجم مكعب = ٦٤ سم^{٣} فإن طول قطر وجه فيه = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣٢ (د) ٦٤

٨ مكعب حجمه ٢ $\sqrt{٢}$ سم^{٣} فإن طول حرفه = ... سم

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١,٥

متوازى المستطيلات

٦ متوازى مستطيلات بعدا قاعدته ٩ سم ، ١٠ سم ، وارتفاعه ٥ سم أوجد :

١ حجمه. ٢ مساحته الجانبية.

٣ مساحته الكلية. «٤٥٠ سم^{٣} ، ١٩٠ سم^{٢} ، ٣٧٠ سم^{٢}»

---

٧ متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم أوجد حجمه. «٦ سم^{٣}»

---

٨ متوازى مستطيلات مساحته الجانبية ٤٨٠ سم^{٢} ، وقاعدته على شكل مربع طول ضلعه ١٠ سم احسب ارتفاعه. «١٢ سم»

---

٩ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه ٧٢٠ سم^{٣} وارتفاعه ٥ سم أوجد مساحته الكلية. «٥٢٨ سم^{٢}»

---

١٠ أيهما أكبر حجمًا :

مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^{٢} أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ سم ؟

---

١١ فى الشكل المقابل :

٢٥ سم
١٥ سم

قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعداها ٢٥ سم ، ١٥ سم قُطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤ سم ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضًا على شكل متوازى مستطيلات أوجد حجمه ومساحته الكلية. «٤٧٦ سم^{٣} ، ٣١١ سم^{٢}»



الدائــرة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$ ما لم يذكر خلاف ذلك)

١٢ دائرة طول نصف قطرها ١٠,٥ سم ، أوجد كلًا من محيطها ومساحتها.

«٦٦ سم ، ٣٤٦,٥ سم^{٢}»

---

١٣ دائرة مساحتها ١٥٤ سم^{٢} ، أوجد محيطها وطول قطرها. «٤٤ سم ، ١٤ سم»

---

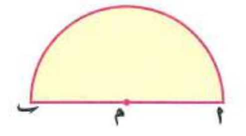
١٤ دائرة مساحتها ٦٤ π سم^{٢} ، أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد محيطها لأقرب عدد صحيح. ($\pi = ٣,١٤$) «٨ سم ، ٥٠ سم»

---

١٥ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة ١٢,٣٢ سم^{٢}

أوجد محيط الشكل.



«١٤,٤ سم»

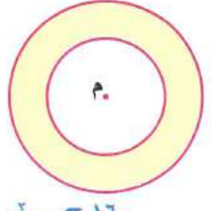
---

١٦ في الشكل المقابل :

دائرتان متحدتان في المركز م

طولا نصفي قطريهما ٣ سم ، ٥ سم

أوجد مساحة الجزء المظلل بدلالة π



«١٦ π سم^{٢}»

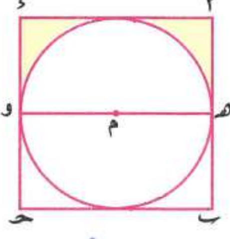
---

١٧ في الشكل المقابل :

الدائرة م مرسومة داخل المربع أ ب حـ ء

، فإذا كانت مساحة الجزء المظلل $١٠\frac{٥}{٧}$ سم^{٢}

أوجد محيط هذا الجزء.



«$٣٥\frac{٥}{٧}$ سم»

الأسطوانة الدائرية القائمة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$ ما لم يذكر خلاف ذلك)

١٨ أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ١٤ سم وارتفاعها ٢٠ سم

أوجد حجمها ومساحتها الكلية.

«١٢٣٢٠ سم^{٣} ، ٢٩٩٢ سم^{٢}»

١٩ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٢٤ سم^{٣} ، وارتفاعها ٦ سم
أوجد مساحتها الجانبية. «٢٦٤ سم^{٢}»

---

٢٠ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^{٣} ، وارتفاعها ٢٤ سم
أوجد مساحتها الكلية. (π = ٣,١٤) «٢١٣٥,٢ سم^{٢}»

---

٢١ **أيهما أكبر حجمًا :** أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم ، أم مكعب طول حرفه ١١ سم ؟

---

٢٢ **أكمل ما يأتى :**

[١] أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها نق سم وارتفاعها ع سم
فإن مساحتها الجانبية .... وحجمها ....

[٢] أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٤٠ π سم^{٣} وارتفاعها ١٠ سم ، يكون طول نصف قطر قاعدتها ....

[٣] أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٥٠٠ π سم^{٣} وطول نصف قطر قاعدتها ٥ سم
فإن ارتفاعها = ...

[٤] أسطوانة دائرية قائمة حجمها π نق^{٣} سم^{٣} فإن ارتفاعها يساوى ....

[٥] إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة قائمة = ٢ π نق^{٢} سم^{٢} فإن ارتفاعها = ...

---

٢٣ أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ٤٤ سم وارتفاعها ٢٥ سم أوجد حجمها. «٣٨٥٠ سم^{٣}»

---

٢٤ أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٥٢ سم^{٢} وطول قطر قاعدتها ٨ سم
أوجد حجمها. «١٠٤ سم^{٣}»

---

٢٥ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٦ π سم^{٣} وارتفاعها ٤ سم ، وطول نصف قطر قاعدتها يساوى طول حرف مكعب. أوجد المساحة الكلية للمكعب. «٥٤ سم^{٢}»

---

٢٦ إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها
أوجد ارتفاع الأسطوانة علمًا بأن حجمها ٧٢ π سم^{٣} «٢ $\sqrt[٣]{٩}$ سم»

٢٧ قطعة من الورق على شكل مستطيل أ ب حـ ء ، فيه : أ ب = ١٠ سم ، ب حـ = ٤٤ سم ، طُويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة ، بحيث ينطبق $\overline{أب}$ على $\overline{حـ ء}$

أوجد حجم الأسطوانة الناتجة. «١٥٤٠ سم^3»

الكـــرة ($\pi = \frac{22}{7}$ ما لم يذكر خلاف ذلك)

٢٨ أوجد الحجم ومساحة السطح لكرة طول قطرها ٤,٢ سم «٣٨,٨٠٨ سم^3 ، ٥٥,٤٤ سم^2»

---

٢٩ كرة حجمها ٤١٨٨ سم^3 أوجد طول نصف قطرها. (π = ٣,١٤١) «١٠ سم»

---

٣٠ كرة حجمها ٥٦٢,٥ π سم^3 أوجد مساحة سطحها بدلالة π «٢٢٥ π سم^2»

---

٣١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] حجم الكرة يساوى ....

(أ) ٤ π نق^2 (ب) $\frac{٤}{٣}$ π نق^3 (جـ) $\frac{٣}{٤}$ π نق^3 (د) $\frac{٤}{٣}$ π نق^2

[٢] الكرة التى طول نصف قطرها $\sqrt[3]{٣}$ سم يكون حجمها .... سم^3

(أ) ٤ π (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ π (جـ) $\frac{٤}{٣}$ π (د) $\frac{٩}{٤}$ π

[٣] حجم كرة طول قطرها ٦ سم = ... سم^3

(أ) ٢٨٨ (ب) ١٢ π (جـ) ٣٦ π (د) ٢٨٨ π

[٤] إذا كان حجم كرة = $\frac{٩}{١٦}$ π سم^3 فإن طول نصف قطرها = ... سم

(أ) ٣ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٣}$

[٥] إذا كانت مساحة كرة = ٩ π سم^2 فإن طول قطرها = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) ١,٥ (د) ٦

[٦] إذا كان ثلاثة أرباع حجم كرة يساوى ٨ π سم^3 فإن طول نصف قطرها يساوى .... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

[٧] إذا كان طول نصف قطر الكرة نق سم فأى مما يلى يمثل النسبة بين مساحة الكرة وحجمها ؟

(أ) $\frac{٤}{نق}$ (ب) $\frac{٣}{نق}$ (جـ) $\frac{نق}{٤}$ (د) $\frac{نق}{\pi}$

---

٣٢ أوجد طول نصف قطر كرة حجمها يساوى حجم أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٨ سم وطول نصف قطر قاعدتها ٤ سم «٦ سم»

---

٣٣ أوجد حجم كرة طول نصف قطرها يساوى طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^{٣} وارتفاعها ٢٤ سم (π = ٣,١٤) «$\frac{٢}{٣}$ ٤١٨٦ سم^{٣}»

---

٣٤ متوازى مستطيلات مصنوع من الرصاص أطوال أحرفه ٧٧ سم ، ٢٤ سم ، ٢١ سم شُكلت منه مادة لتكوين كرة أوجد طول نصف قطرها. «٢١ سم»

---

٣٥ كرة من المعدن طول قطرها ٦ سم ، صُهرت وحُولت إلى أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم ، احسب ارتفاع الأسطوانة. «٤ سم»

---

٣٦ كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣} وضعت داخل مكعب فمست أوجه المكعب الستة

أوجد : [١] طول نصف قطر الكرة. [٢] حجم المكعب. «٣ سم ، ٢١٦ سم^{٣}»

---

٣٧ كرة من المعدن طول نصف قطرها ١٦,٨ سم ، صُهرت وصُنع من مادتها المنصهرة ٨ كرات متساوية الحجم ، أوجد طول نصف قطر كل كرة. «٨,٤ سم»

---

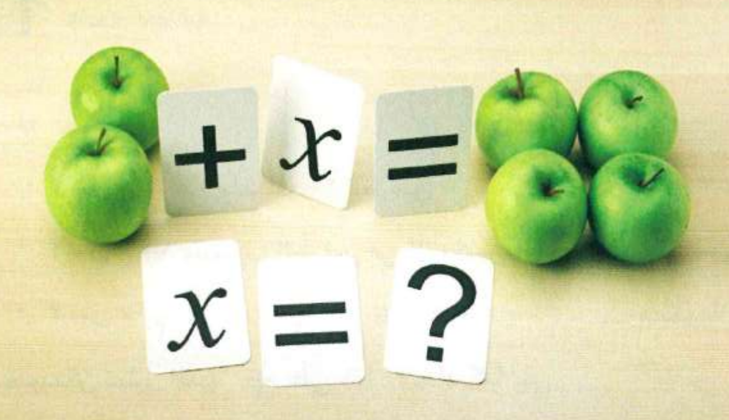
٣٨ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ سم أوجد طول نصف قطر قاعدتها إذا علم أن حجمها يساوى $\frac{٤}{٩}$ حجم كرة طول قطرها ٣٠ سم «١٠ سم»

للمتفوقين

٣٩ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ٣ سم فإذا كان مجموع أطوال أحرفه ٥٢ سم أوجد حجمه. «٧٥ سم^{٣}»

---

٤٠ كرة معدنية جوفاء طول نصف قطرها الداخلى ٢,١ سم وطول نصف قطرها الخارجى ٣,٥ سم. أوجد كتلتها لأقرب جرام علمًا بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جرامًا. «٢٨١٧ جرامًا»



الدرس 10 حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

أولًا حل معادلات الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

* كل من المعادلات :
- • ٢ س − ٥ = ٣
- • $\sqrt{٣}$ س − ١ = ٨
- • $\frac{١}{٢}$ س − $\sqrt{٥}$ = ٠

تسمى معادلة من الدرجة الأولى فى متغير (مجهول) واحد وهو س لأن : أس المتغير س يساوى الواحد الصحيح

* ومعنى حل معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

هو إيجاد العدد الحقيقى الذى يحقق هذه المعادلة.

* والأمثلة التالية سوف توضح كيفية حل معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد.

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

١ ٣ س + ٢ = ١

٢ $\sqrt{٣}$ س − ١ = ٢

٣ ٧ س − $\sqrt{٧}$ = ٦ $\sqrt{٧}$

٤ س − $\sqrt{٥}$ = ١

الحــل

١ ∵ ٣ ـس + ٢ = ١ بإضافة −٢ للطرفين ∴ ٣ ـس + ٢ − ٢ = ١ − ٢

∴ ٣ ـس = −١ وبضرب الطرفين فى المعكوس الضربى لمعامل ـس وهو $\frac{١}{٣}$

∴ ٣ ـس × $\frac{١}{٣}$ = −١ × $\frac{١}{٣}$ ∴ ـس = −$\frac{١}{٣}$ ∴ مجموعة الحل = $\{-\frac{١}{٣}\}$

* ويمكن تمثيل العدد $\frac{-١}{٣}$ على خط الأعداد كما يلى :

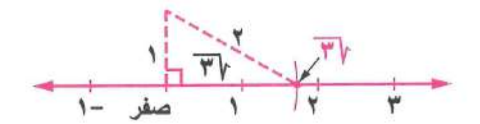


٢ ∵ $\sqrt{٣}$ ـس − ١ = ٢ ∴ $\sqrt{٣}$ ـس = ٢ + ١

∴ $\sqrt{٣}$ ـس = ٣ ∴ ـس = $\frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

∴ ـس = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$ ∴ ـس = $\sqrt{٣}$ ∴ مجموعة الحل = $\{\sqrt{٣}\}$

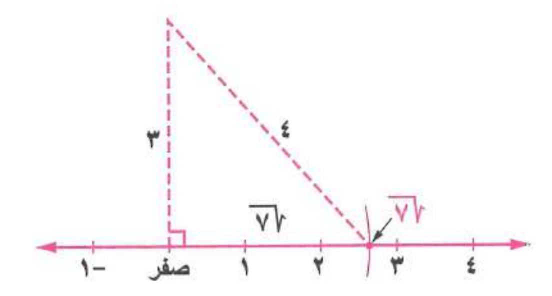
* ويمكن تمثيل العدد $\sqrt{٣}$ على خط الأعداد كما يلى :



٣ ∵ ٧ ـس − $\sqrt{٧}$ = ٦ $\sqrt{٧}$ ∴ ٧ ـس = ٦ $\sqrt{٧}$ + $\sqrt{٧}$ ∴ ٧ ـس = ٧ $\sqrt{٧}$

∴ ـس = $\frac{٧\sqrt{٧}}{٧}$ ∴ ـس = $\sqrt{٧}$ ∴ مجموعة الحل = $\{\sqrt{٧}\}$

* ويمكن تمثيل العدد $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد كما يلى :



٤ ∵ س − √٥ = ١ ∴ س = ١ + √٥ ∴ مجموعة الحل = {١ + √٥}

* ويمكن تمثيل العدد (١ + √٥) على خط الأعداد كما بالشكل المقابل :

٢ ، ٣ ، √٥

٢− ، ١− ، صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

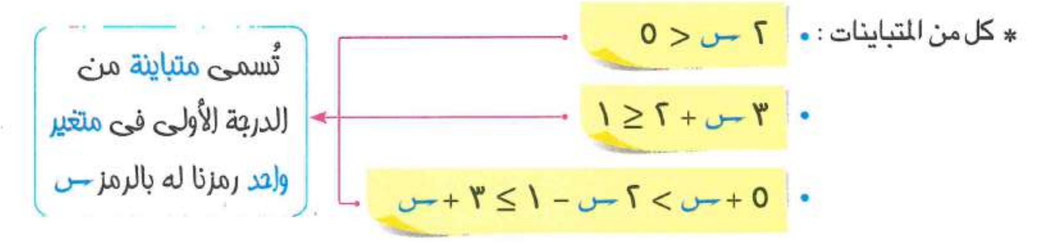
١ + √٥

حاول بنفسك ١

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

١ ٢ س + ٥ = ٤ ٢ √٥ س − ١ = ٤ ٣ س − √٣ = ٢

ثانيًا حل متباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح



* وحل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المتغير (س) التى تحقق هذه المتباينة.

* مجموعة حل هذه المتباينات فى ح سوف نكتبها على صورة فترة كما سيتضح فيما بعد.

وطرق حل مثل هذه المتباينات فى ح تعتمد على خواص علاقة التباين التى نلخصها فيما يلى :

بفرض أن أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية وكان أ < ب فإن :

- أ + حـ < ب + حـ ← سواء كانت حـ موجبة أو سالبة (خاصية الإضافة)
- أ حـ < ب حـ ← إذا كانت حـ موجبة (خاصية الضرب فى عدد حقيقى موجب)
- أ حـ > ب حـ ← إذا كانت حـ سالبة (خاصية الضرب فى عدد حقيقى سالب)

أى أن : عند ضرب (أو قسمة) طرفى المتباينة فى (على) عدد سالب يتغير اتجاه علامة التباين.

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يأتى ومثل الحل على خط الأعداد :

١ ٢ س + ٦ < ٢ ٢ ٥ − ٤ س ≤ −٣

الحــل

١ ∵ ٢ س + ٦ < ٢ (وبإضافة المعكوس الجمعى للعدد ٦ وهو (−٦) للطرفين)

∴ ٢ س + ٦ − ٦ < ٢ − ٦

∴ ٢ س < −٤ (وبضرب الطرفين فى المعكوس الضربى للعدد ٢ وهو $\frac{1}{2}$)

∴ ٢ س × $\frac{1}{2}$ < −٤ × $\frac{1}{2}$ ∴ س < −٢

∴ مجموعة الحل هى جميع الأعداد الحقيقية التى كل منها أقل من (−٢)

أى أن : مجموعة الحل =]− ∞ ، −٢[

−∞ ، −٤ ، −٣ ، −٢ ، −١ ، صفر ، ١

٢ ∵ ٥ − ٤ س ≤ −٣ (وبإضافة −٥ للطرفين)

∴ −٤ س ≤ −٨ (وبقسمة الطرفين على −٤)

∴ س ≥ ٢ (لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا قسمنا على عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = [٢ ، ∞[



مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينتين الآتيتين ومثل الحل على خط الأعداد :

١ −٣ < ٢ س − ١ ≤ ٥ ٢ ٣ < ٣ − ٥ س < ١٣

الحــل

١ ∵ −٣ < ٢ س − ١ ≤ ٥ (بإضافة ١ لجميع الأطراف)

∴ −٢ < ٢ س ≤ ٦ (بقسمة جميع الأطراف على ٢) ∴ −١ < س ≤ ٣

∴ مجموعة الحل =]−١ ، ٣]

−١ ٣

٢ ∵ ٣ < ٣ − ٥ س < ١٣ (بطرح ٣ من جميع الأطراف)

∴ ٠ < −٥ س < ١٠ (بقسمة جميع الأطراف على −٥)

∴ ٠ > س > −٢ (لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا قسمنا على عدد سالب)

∴ مجموعة الحل =]−٢ ، ٠[

−٢ صفر

مثال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينتين الآتيتين :

١ س − ٢ ≤ ٣ س − ٥

٢ س − ١ < ٣ س − ٣ ≤ س + ٥

الحل

١ ∵ س − ٢ ≤ ٣ س − ٥ (وبإضافة ٢ للطرفين)

∴ س ≤ ٣ س − ٣ (وبإضافة −٣ س للطرفين)

∴ −٢ س ≤ −٣ (وبضرب الطرفين فى $-\frac{١}{٢}$)

∴ س ≥ $\frac{٣}{٢}$ (لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا ضربنا فى عدد سالب)

∴ مجموعة الحل =]−∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

٢ ∵ س − ١ < ٣ س − ٣ ≤ س + ٥ (وبإضافة ٣ للأطراف الثلاثة)

∴ س + ٢ < ٣ س ≤ س + ٨ (وبإضافة − س للأطراف الثلاثة)

∴ ٢ < ٢ س ≤ ٨ (وبالضرب فى $\frac{١}{٢}$)   ∴ ١ < س ≤ ٤

∴ مجموعة الحل =]١ ، ٤]

حاول بنفسك ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

١ ٣ س − ١ > ٨

٢ ٢ − ٢ س ≤ −٦

٣ −١٦ < ٥ س + ٤ ≤ ٩

٤ ٢ س + ١ < ٤ س − ٣ < ٢ س − ١١



تمارين 10 على حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح



اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات   📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

[١] 📖 س + ٥ = ٠	[٢] 📖 ٥ س + ٦ = ١	[٣] 📖 ٢ س + ٤ = ٣
[٤] 📖 ٢ س − ٣ = ٤	[٥] ٤ س − ١ = | −٢ |	[٦] √٥ س − ١ = ٤
[٧] س − ١ = √٣	[٨] ٢ − √٦ س = | −٨ |	[٩] 📖 س + ٢ √٣ = ٣

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الشكل (خط أعداد عند −٣) يمثل مجموعة حل المتباينة .... فى ح

(أ) س < −٣   (ب) س ≤ −٣   (جـ) س > −٣   (د) س ≥ −٣

[٢] الشكل (خط أعداد بين −٦ و ٦) يمثل مجموعة حل المتباينة .... فى ح

(أ) −٦ < س < ٦   (ب) −٦ ≤ س < ٦

(جـ) −٦ < س ≤ ٦   (د) −٦ ≤ س ≤ ٦

[٣] إذا كانت : س ∈]٣ ، ∞[فإن : ....

(أ) س < ٣   (ب) س ≤ ٣   (جـ) س > ٣   (د) س ≥ ٣

[٤] مجموعة حل المتباينة : س > ٧ فى ح هى ....

(أ)]−٧ ، ∞[(ب) [٧ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٧[(د)]٧ ، ∞[

[٥] مجموعة حل المتباينة : −١ < س ≤ ٥ فى ح هى ....

(أ)]−١ ، ٥]   (ب) [−١ ، ٥]   (جـ) {−١ ، ٥}   (د) [−١ ، ٥[

[٦] مجموعة حل المتباينة : −س > ٣ فى ح هى ....

(أ) {−٣}   (ب)]٣ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣[(د)]−∞ ، −٣[

٣ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

[١] ٢ س > ٦
[٢] -٧ س ≥ -١٤
[٣] س + ٣ ≤ ٥
[٤] ٥ - س > ٣
[٥] ٢ س + ٥ ≥ ٣
[٦] ١ - ٥ س < ٦
[٧] ١/٢ س + ١ ≤ ٢
[٨] ٣ - ٢ س ≤ ٧

---

٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

[١] ٣ < س + ٢ ≤ ٦
[٢] -٥ < س + ٣ < ٩
[٣] -٣ ≤ -س < ٣
[٤] ١ < ٥ - س ≤ ٣
[٥] ∛(-٨) ≤ س + ١ ≤ √٩
[٦] ٥ < ٣ - س ≤ ٣²
[٧] -٨ ≤ ٣ س + ١ ≤ ٤
[٨] |-٣| < ٢ س - ١ < ٥
[٩] -٣ < ١/٢ س - ٢ ≤ صفر
[١٠] ٠ ≤ (-٢ س + ٦)/٣ < ٤

---

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

[١] ٣ س < ٢ س + ٤
[٢] ٧ س - ٩ ≥ ٤ س
[٣] ٥ س - ٣ < ٢ س + ٩
[٤] ٧ س - ١٢ ≥ ٥ س - ٨
[٥] س - ١ ≤ ٣ - س
[٦] ١ - س ≥ -٢ س - ٣

---

٦ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثلها على خط الأعداد :

[١] س + ٣ ≥ ٢ س ≥ س - ٢
[٢] -س < س < ٤ - س
[٣] ٤ س ≤ ٥ س + ٢ < ٤ س + ٣
[٤] س - ١ < ٣ س - ١ ≤ س + ١
[٥] ٢ + ٢ س ≤ ٣ س + ٣ < ٥ + ٢ س
[٦] (٣ س - ٤)/٦ < س + ١ < (س + ٣)/٢

٧ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كان : س − ٣ ≤ ٠ فإن : س ....

[٢] إذا كان : ٥ س < ١٥ فإن : س ....

[٣] إذا كان : ١ − س > ٤ فإن : س ....

[٤] إذا كان : −٢ س ≥ ٣ فإن : س ....

[٥] إذا كان : $\sqrt{٢}$ س ≤ ٤ فإن : س ....

[٦] مجموعة حل المتباينة : ٤ < ٢ س < ٨ فى ح هى ....

[٧] مجموعة حل المتباينة : −٥ ≤ − س < ٢ فى ح هى ....

[٨] مجموعة حل المتباينة : ٢ − س < ٠ فى ح هى ....

[٩] إذا كانت : −٣ < س < ٣ حيث س ∈ ح فإن : ٢ س ∈]−٦ ، ....[

---

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] مجموعة حل المتباينة : س + ٣ < ٣ فى ح هى ....

(أ)]−∞ ، ٠[(ب)]−∞ ، ٠] (جـ) [٠ ، ∞[(د)]٠ ، ∞[

[٢] مجموعة حل المتباينة : ١ > س − ٥ > −١ فى ح هى ....

(أ) [٤ ، ٦] (ب)]٤ ، ٦[(جـ)]٤ ، ٦] (د) [٤ ، ٦[

[٣] إذا كانت : س > ٥ فإن : − س ....

(أ) > −٩ (ب) ≤ −٥ (جـ) > −٥ (د) < −٥

٤ إذا كان : $-٢ < س < ٢$ فإن : ٢ س + ٣ تنتمى إلى ....

(أ) $[-١ ، ٧]$ (ب) $]-١ ، ٥[$ (جـ) $]-١ ، ٧[$ (د) $]-٤ ، ٦[$

٥ العدد ٥ ينتمى إلى مجموعة حل المتباينة ....

(أ) $س > ٥$ (ب) $س < ٥$ (جـ) $-س \geq -٥$ (د) $-س \leq ٥$

تطبيق حياتى

٩ مصعد لنقل البضائع أقصى حمولة له ٢٢٠٠ كجم فإذا كان لدينا ٦٠ صندوقًا من المعلبات وكان وزن الصندوق الواحد ٤٥ كجم فأوجد أكبر عدد من الصناديق يستطيع المصعد حمله فى المرة الواحدة دون ركوب أى شخص. «٤٨ صندوقًا»

للمتفوقين

١٠ أثبت أن : $\sqrt{٣}$ ينتمى لمجموعة حل المتباينة : $٠ < ٤ - ٢س < ٦$ فى ح

---

١١ إذا كانت : $[٤ ، ٧]$ هى مجموعة حل المتباينة : $أ \leq س - ٣ \leq ب$

فأوجد قيمة كل من : أ ، ب «١ ، ٤»

---

١٢ إذا كانت : $[م ، م + ن]$ هى مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{٥} \leq \frac{٢س + ١}{٥} \leq ١$

فأوجد قيمة : ن «٢»

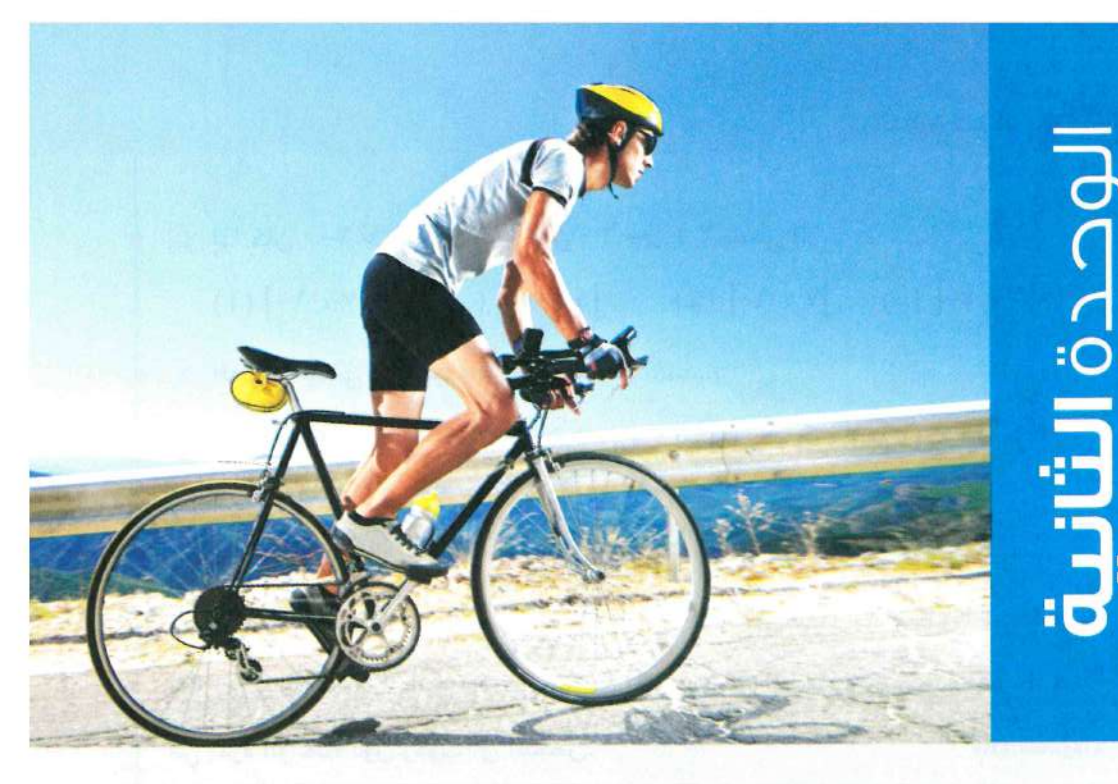
---

١٣ إذا كان : $٥ \leq \frac{٢س}{٣} + ١ \leq ٧$

فأوجد أصغر قيمة للمقدار : س − ٢ «٤»

---

١٤ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $\frac{س}{\sqrt{٣} - \sqrt{٥}} \leq \sqrt{٣} + \sqrt{٥}$



الوحدة الثانية

العلاقة بين متغيرين

الدرس الأول : العلاقة بين متغيرين.

الدرس الثانى : ميل الخط المستقيم.

الدرس الثالث : تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم.

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف العلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.
- يمثل بيانيًا العلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.
- يتعرف ميل الخط المستقيم.
- يوجد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين.
- يتعرف ميل الخط المستقيم الموازى لمحور السينات ، وميل الخط المستقيم الموازى لمحور الصادات.
- يتحقق باستخدام ميل الخط المستقيم أن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة أو لا تقع على استقامة واحدة.
- يوجد السرعة المنتظمة التى تسير بها سيارة باستخدام ميل الخط المستقيم.
- يحل تطبيقات على ميل الخط المستقيم.

يمكنك
حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح **QR code** الخاص بكل امتحان

SCAN

الدرس 1

العلاقة بين متغيرين

مفهوم العلاقة بين متغيرين

- إسلام يمتلك ٥٠ جنيهًا ، فإذا ذهب إسلام إلى مدينة الملاهى ووجد هناك نوعين من الألعاب المفضلة إليه :



ما هى الإمكانات المتاحة للعب بكلا النوعين بحيث ينفق كل ما معه من نقود ؟!!

- **لدراسة كل الإمكانات المتاحة نفرض أن :**

- عدد المرات التى يمكن أن يلعبها من النوع الأول هو س ومن النوع الثانى ص
- فيكون : تكلفة مرات اللعب من النوع الأول هى ٥ س جنيهًا
 ، تكلفة مرات اللعب من النوع الثانى هى ١٠ ص جنيهًا.
- وحتى ينفق كل ما معه من نقود يجب أن يكون : ٥ س + ١٠ ص = ٥٠

وهى علاقة رياضية بين المتغيرين س ، ص وتسمى معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين.

• ويمكن تبسيط المعادلة السابقة بقسمة جميع حدودها على ٥

فنحصل على معادلة مكافئة وهى س + ٢ ص = ١٠

ويمكن كتابتها على الصورة : ٢ ص = ١٠ − س

أى أن : ص = $\frac{١٠ - س}{٢}$

٥ س + ١٠ ص = ٥٠ (÷ ٥)

س + ٢ ص = ١٠

٢ ص = ١٠ − س (÷ ٢)

ص = $\frac{١٠ - س}{٢}$

فمثلاً :

* إذا قرر إسلام عدم اللعب بالنوع الأول أى أن : س = ٠ فإن : ص = $\frac{١٠ - ٠}{٢}$ = ٥

أى أنه يمكنه إنفاق المبلغ بالكامل على اللعب ٥ مرات من النوع الثانى ويعبر عن ذلك بالزوج المرتب (٠ ، ٥)

* وإذا قرر اللعب بالنوع الأول مرة واحدة أى أن : س = ١ فإن : ص = $\frac{١٠ - ١}{٢}$ = $٤\frac{١}{٢}$

ولكن فى هذه الحالة لا يمكن اللعب عدد $٤\frac{١}{٢}$ مرة من النوع الثانى لأن عدد مرات اللعب يجب أن يكون عددًا طبيعيًا.

* وإذا قرر اللعب مرتين بالنوع الأول أى أن : س = ٢ فإن : ص = $\frac{١٠ - ٢}{٢}$ = ٤

أى أنه يمكنه إنفاق المبلغ بالكامل على اللعب مرتين من النوع الأول وأربع مرات من النوع الثانى ونعبر عن ذلك بالزوج المرتب (٢ ، ٤)

وهكذا يمكن معرفة الإمكانات المختلفة ووضعها فى جدول كالآتى :

س (عدد مرات اللعب من النوع الأول)	٠	٢	٤	٦	٨	١٠
ص (عدد مرات اللعب من النوع الثانى)	٥	٤	٣	٢	١	٠

! ملاحظتان

① يوجد عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة السابقة ولكن بعض الأزواج المرتبة لا تصلح للتعبير عن عدد مرات اللعب لأن عدد مرات اللعب لا بد أن يكون عددًا طبيعيًا.

* فكما ذكرنا سابقًا $(٤\frac{١}{٢} \text{ ، } ١)$ يحقق العلاقة ولكن لا يمكن استخدامه للتعبير عن عدد مرات اللعب لأن $٤\frac{١}{٢} \notin$ ط

* وبالمثل (−٢ ، ٦) يحقق العلاقة ولكن لا يمكن استخدامه للتعبير عن عدد مرات اللعب لأن −٢ $\notin$ ط

② لدراسة كل الإمكانات المتاحة كتبنا المعادلة : س + ٢ ص = ١٠ بجعل ص فى طرف مستقل على الصورة : ص = $\frac{١٠ - س}{٢}$

ويمكن أيضًا جعل س فى طرف مستقل فتكون المعادلة على الصورة : س = ١٠ − ٢ ص

وهذا ما سوف نتبعه عند حل المثال التالى.

العلاقة الخطية

العلاقة الخطية هى علاقة من الدرجة الأولى بين متغيرين س ، ص وتكون على الصورة :

أ س + ب ص = جـ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ ، ب كلاهما معًا ≠ ٠ .

ويوجد عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة يحقق هذه العلاقة والتى عند تمثيلها بيانيًا تكون **خط مستقيم**.

ولذلك سُميت بالعلاقة الخطية وسوف يتضح لنا ذلك لاحقًا عند دراسة التمثيل البيانى للعلاقة الخطية.

مثال ١

أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات الآتية :

١ ٣ س + ص = ٥
٢ ٣ س - ٢ ص = ٦
٣ ٢ س = ٣
٤ ص = -٢

الحل

يمكن إيجاد الأزواج المرتبة بوضع قيمة س وإيجاد قيمة ص المناظرة أو العكس

١ • بوضع س = ٠

∴ ٣ × ٠ + ص = ٥ ∴ ص = ٥ ∴ (٠ ، ٥) يحقق العلاقة.

• بوضع س = ١

∴ ٣ × ١ + ص = ٥ ∴ ص = ٥ - ٣ = ٢ ∴ (١ ، ٢) يحقق العلاقة.

• بوضع س = -٢

∴ ٣ × (-٢) + ص = ٥ ∴ ص = ٥ + ٦ = ١١

∴ (-٢ ، ١١) يحقق العلاقة.

٢ يمكن التعويض مباشرة كما تم فى ١ ولكننا سنقدم طريقة أخرى للحل بوضع أحد المتغيرين فى طرف مستقل.

∵ ٣ س - ٢ ص = ٦ ∴ -٢ ص = ٦ - ٣ س وبالضرب فى -١

∴ ٢ ص = ٣ س - ٦ ∴ ص = $\frac{٣ س - ٦}{٢}$

• بوضع س = ٠ ∴ ص = $\frac{٣ \times ٠ - ٦}{٢}$ = -٣ ∴ (٠ ، -٣) يحقق العلاقة.

• بوضع س = ١ ∴ ص = $\frac{٣ \times ١ - ٦}{٢}$ = $-\frac{٣}{٢}$ = $-١\frac{١}{٢}$ ∴ $(١ ، -١\frac{١}{٢})$ يحقق العلاقة.

• بوضع س = ٢ ∴ ص = $\frac{٣ \times ٢ - ٦}{٢}$ = ٠ ∴ (٢ ، ٠) يحقق العلاقة.

٣ ∵ ٢ س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ س = $١\frac{١}{٢}$

هذه العلاقة يحققها جميع الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث س = $١\frac{١}{٢}$ مهما كانت قيمة ص

مثل : $(١\frac{١}{٢} ، ٠)$ ، $(١\frac{١}{٢} ، ١)$ ، $(١\frac{١}{٢} ، ٢)$

٤ ص = -٢

هذه العلاقة يحققها جميع الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث ص = -٢ مهما كانت قيمة س

مثل : (٠ ، -٢) ، (١ ، -٢) ، (٢ ، -٢)

حاول بنفسك ١

أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ٣ س + ص = ٢

مثال ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أى الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة : ٢ س - ص = ١ ؟

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٥ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٥) (د) (-٢ ، ٥)

٢ إذا كان : (٢ ، -٣) يحقق العلاقة : ٢ س - ص = حـ فإن : حـ = ...

(أ) -٧ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٧

٣ إذا كان : (-٢ ، ١) يحقق العلاقة : ٣ س + ب ص = ١ فإن : ب = ...

(أ) -٧ (ب) -٥ (جـ) ٥ (د) ٧

٤ إذا كان : (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : ٥ س - ص = ٦ فإن : ك = ...

(أ) -١٨ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ١٨

٥ إذا كان : (ك ، -٢) يحقق العلاقة : ٥ س + ٤ ص = ٧ فإن : ك = ...

(أ) -٣ (ب) $-\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) ٣

الحـــل

١ (جـ) **تفسير الحل :** بالتعويض بكل زوج مرتب فى العلاقة المعطاة نجد أن (٣ ، ٥) يحقق العلاقة كالتالى :

بوضع : س = ٣ ، ص = ٥

∴ ٢ س - ص = ٢ (٣) - ٥ = ٦ - ٥ = ١

∴ (٣ ، ٥) يحقق العلاقة.

٢ (د) **تفسير الحل :** ∵ (٢ ، −٣) يحقق العلاقة : ٢ س − ص = حـ

∴ ٢ (٢) − (−٣) = حـ

∴ ٤ + ٣ = حـ ∴ حـ = ٧

٣ (د) **تفسير الحل :** ∵ (−٢ ، ١) يحقق العلاقة : ٣ س + ب ص = ١

∴ ٣ (−٢) + ب (١) = ١ ∴ −٦ + ب = ١

∴ ب = ١ + ٦ ∴ ب = ٧

٤ (جـ) **تفسير الحل :** ∵ (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : ٥ س − ص = ٦

∴ ٥ ك − ٢ ك = ٦ ∴ ٣ ك = ٦

∴ ك = ٢

٥ (د) **تفسير الحل :** ∵ (ك ، −٢) يحقق العلاقة : ٥ س + ٤ ص = ٧

∴ ٥ ك + ٤ (−٢) = ٧ ∴ ٥ ك − ٨ = ٧

∴ ٥ ك = ١٥ ∴ ك = ٣

حاول بنفسك ٢

إذا كان (٣ ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : س − ٣ ص = ٩ **فأوجد قيمة : ك**

التمثيل البيانى للعلاقة الخطية

• سبق أن ذكرنا أن العلاقة الخطية بين س ، ص والتى تكتب عادة على الصورة :

أ س + ب ص = حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ، ب كلاهما معًا ≠ ٠ يمثلها بيانيًا خط مستقيم ولذلك سُميت علاقة خطية.

• عند تمثيل العلاقة الخطية بيانيًا نوجد على الأقل زوجين مرتبين يحققان العلاقة.

ثم يمكن إيجاد زوج مرتب ثالث لنتأكد من أن النقاط الثلاثة التى تمثل الأزواج المرتبة الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد فيكون هذا الخط هو التمثيل البيانى للعلاقة. والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٣

مثل بيانيًا العلاقة : ٢ س − ص = ٣

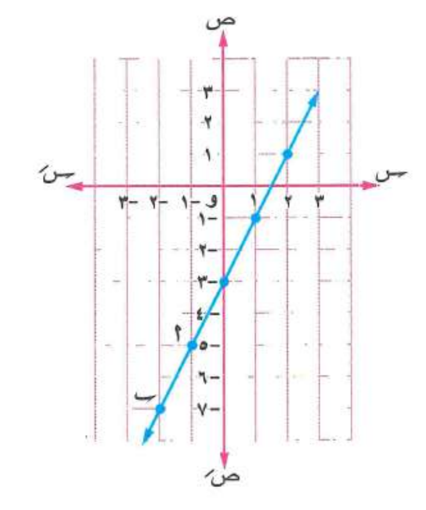
الحل

لتمثيل هذه العلاقة بيانيًا نعين ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ٢ س − ص = ٣ وذلك :

- بوضع : س = ٠ ∴ ٢ × ٠ − ص = ٣ ∴ − ص = ٣ ∴ ص = −٣
- بوضع : س = ١ ∴ ٢ × ١ − ص = ٣ ∴ − ص = ١ ∴ ص = −١
- بوضع : س = ٢ ∴ ٢ × ٢ − ص = ٣ ∴ − ص = −١ ∴ ص = ١

ويمكن وضع قيم س ، ص فى جدول كالتالى :

س	٠	١	٢
ص	−٣	−١	١



ونعين فى النظام الإحداثى المتعامد النقط التى تمثل الأزواج المرتبة :

(٠ ، −٣) ، (١ ، −١) ، (٢ ، ١)

ونرسم الخط المستقيم المار بهم فيكون هو التمثيل البيانى للعلاقة ٢ س − ص = ٣

ملاحظة

جميع نقط الخط المستقيم الممثل للعلاقة تعين أزواج مرتبة تحقق العلاقة.

فمثلًا : النقطة أ تعين الزوج المرتب (−١ ، −٥) وهو يحقق العلاقة.

فعند وضع س = −١ نجد أن ٢ × (−١) − ص = ٣

أى أن : ص = −٥ وكذلك النقطة ب (−٢ ، −٧)

حاول بنفسك ٣

مثل بيانيًا العلاقة : ص − ٢ س = −١

حـالات خاصـة

• سبق أن درسنا العلاقة : أ س + ب ص = حـ حيث أ ، ب كلاهما معًا ≠ ٠ وهى تسمى علاقة خطية وتمثل بيانيًا بخط مستقيم ، وندرس الحالات التالية :



١ إذا كان : أ = ٠ ، ب ≠ ٠

فتصبح العلاقة على الصورة :

ب ص = حـ

ويمثلها بيانيًا مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، حـ/ب)

العلاقة ٢ ص = ٤

أى : ص = ٢

يمثلها بيانيًا مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)

لاحظ أن : العلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات.

٢ إذا كان : ب = ٠ ، أ ≠ ٠

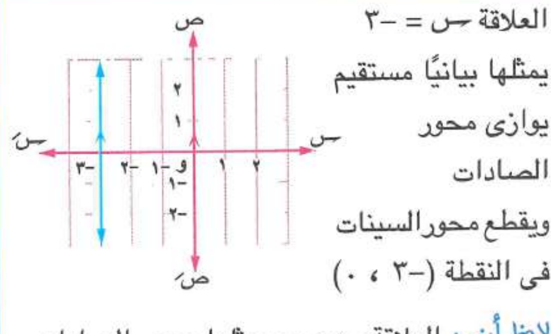
فتصبح العلاقة على الصورة :

أ س = حـ

ويمثلها بيانيًا مستقيم يوازى محور الصادات ويقطع محور السينات فى النقطة (حـ/أ ، ٠)

العلاقة س = -٣

يمثلها بيانيًا مستقيم يوازى محور الصادات ويقطع محور السينات فى النقطة (-٣ ، ٠)



لاحظ أن : العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات.

٣ إذا كان : حـ = ٠

فتصبح العلاقة على الصورة :

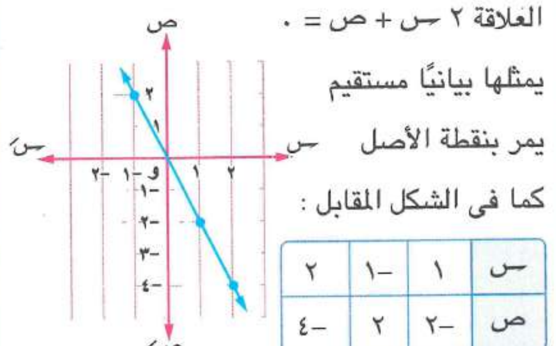
أ س + ب ص = ٠

ويمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

العلاقة ٢ س + ص = ٠

يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل كما فى الشكل المقابل :

س	١	١-	٢
ص	٢-	٢	٤-



مثال ٤

ارسم المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ س + ٥ ص = ١٠

وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ ويقطع محور الصادات فى النقطة ب فأوجد مساحة المثلث و أ ب حيث «و» هى نقطة الأصل.

الحل

∵ ٢ س + ٥ ص = ١٠ ∴ ٢ س = ١٠ − ٥ ص ∴ س = (١٠ − ٥ ص) / ٢

- بوضع : ص = ٠ ∴ س = (١٠ − ٥ (٠)) / ٢ = ٥ ∴ (٥ ، ٠) يحقق العلاقة.
- بوضع : ص = ٢ ∴ س = (١٠ − ٥ (٢)) / ٢ = ٠ ∴ (٠ ، ٢) يحقق العلاقة.
- بوضع : ص = ٤ ∴ س = (١٠ − ٥ (٤)) / ٢ = −٥ ∴ (−٥ ، ٤) يحقق العلاقة.



س	٥	٠	−٥
ص	٠	٢	٤

∵ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (٥ ، ٠)

∴ و أ = ٥ وحدات طول

، ∵ المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢) ∴ و ب = ٢ وحدة طول

∴ مساحة Δ و أ ب = $\frac{1}{2}$ و أ × و ب = $\frac{1}{2}$ × ٥ × ٢ = ٥ وحدات مربعة.

ملاحظة

فى المثال السابق : يمكن إيجاد نقطتى تقاطع المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ س + ٥ ص = ١٠ مع محورى الإحداثيات دون الاستعانة بالتمثيل البيانى له وذلك.

- بوضع : ص = ٠ : ∴ ٢ س + ٥ (٠) = ١٠ ∴ ٢ س = ١٠ ∴ س = ٥

  ∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هى (٥ ، ٠)
- بوضع : س = ٠ : ∴ ٢ (٠) + ٥ ص = ١٠ ∴ ٥ ص = ١٠ ∴ ص = ٢

  ∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هى (٠ ، ٢)



على العلاقة بين متغيرين



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات ● أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل الأزواج المرتبة الآتية التى تحقق العلاقة : ص = ٣ س − ١

(٥ ، .....) ، (٢ ، .....) ، (٠ ، .....) ، (−٣ ، .....)

---

٢ بين أيًا من الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة : ص − ٤ س = ٧

[١] (١ ، ٢) [٢] (٣ ، −٥) [٣] (−١ ، ٣)

---

٣ أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات الآتية :

[١] ٢ س − ص = ٥

[٢] ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥

[٣] ص = ٢

[٤] ٢ س = ٥

---

٤ باستخدام العلاقات الخطية أكمل الجداول الآتية :

[١] ٤ س − ص = −١

س	٠	١	٢	٣
ص	.....	.....	.....	.....

[٢] ص = ٥ س + ١٥

س	−٤	−٣	−٢
ص	.....	.....	.....

[٣] أ − ب = ٤

أ	١	.....	.....
ب	.....	٠	−١

[٤] أ − ٣ ب = ٥

أ	٢	.....	−١
ب	.....	٠	.....

---

٥ إذا كانت : ص − ٢ س = ١ فأوجد :

[١] ص عندما س = ٣

[٢] ص عندما س = −٥

[٣] س عندما ص = ١

[٤] س عندما ص = −١

---

٦ إذا كان : (٣ ، ٦) يحقق العلاقة : ص = ك س فأوجد قيمة : ك

«٢»

٧ إذا كان : (٣ ، ١) يحقق العلاقة : ص − ٣ س = أ **فأوجد قيمة : أ** «−٨»

---

٨ إذا كان : (−٣ ، ٢) يحقق العلاقة : ٣ س + ب ص = ١ **فأوجد قيمة : ب** «٥»

---

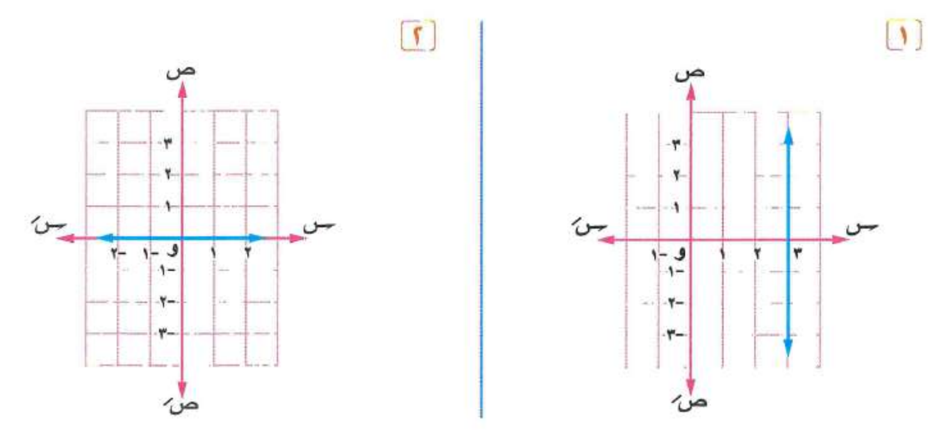
٩ إذا كان : (٣ ، أ) يحقق العلاقة : ص − ٢ س = ٤ **فأوجد قيمة : أ** «١٠»

---

١٠ إذا كان : (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : س + ص = ١٥ **فأوجد قيمة : ك** «٥»

---

١١ أوجد العلاقة التى يمثلها الخط المستقيم فى كل من الشكلين الآتيين :



---

١٢ مثل بيانيًا كلًا من العلاقات الآتية :

[١] س + ص = ٢

[٢] س − ص = ٣

[٣] س + ٢ ص = ٣

[٤] ص − ٣ س = ١

[٥] ص = −٢ س

[٦] ص − ٢ س + ١ = ٠

[٧] ٢ س = ٥

[٨] ص + ١ = ٠

---

١٣ مثل بيانيًا المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ س + ٣ ص = ٦ وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ ويقطع محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و أ ب حيث النقطة و هى نقطة الأصل. «٣ وحدة مربعة»

١٤ إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة : ٢ س – ص = أ يقطع محور السينات فى النقطة (٣ ، ب)

فأوجد قيمة كل من : أ ، ب «٦ ، ٠»

---

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] أى الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥ ؟

(أ) (–١ ، ٣) (ب) (١ ، ٣) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٢ ، ٢)

[٢] (٣ ، ٢) لا يحقق العلاقة ....

(أ) ص + س = ٥ (ب) ٣ ص – س = ٣

(جـ) ص + س = ٧ (د) س – ص = ١

[٣] العلاقة : ٥ س = ٧ ص يمثلها مستقيم يمر بالنقطة ....

(أ) (٥ ، ٧) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٥ ، ٠) (د) (٠ ، ٧)

[٤] النقطة (٣ ، ٥) تقع على المستقيم الذى يمثل العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س – ٥ (ب) ٢ س – ص = ١

(جـ) ٣ س + ص = ١ (د) ص = ٣ س – ١

[٥] إذا كان : (٢ ، –٥) يحقق العلاقة : ٣ س – ص + حـ = ٠ فإن : حـ = ...

(أ) ١ (ب) –١ (جـ) ١١ (د) –١١

[٦] إذا كان (–١ ، ٥) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ٧ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) ١ (د) ١٠

[٧] أى من العلاقات الآتية يمثلها مستقيم يوازى محور الصادات ؟

(أ) ص = –٥ (ب) س = –٥ (جـ) س = ص (د) س + ص = ٠

[٨] أى من العلاقات الآتية يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ؟

(أ) ٢ ص = ٦ (ب) ٢ س = ٦ (جـ) س = – ص (د) س – ص = ٠

[٩] أى من العلاقات الآتية يمثلها مستقيم يمر بنقطة الأصل ؟

(أ) ص = ٥ (ب) س = -٣

(جـ) ص = س + ٢ (د) ص = ٣ س

[١٠] العلاقة : ٣ س + ٨ ص = ٢٤ يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ٨) (ب) (٨ ، ٠)

(جـ) (٠ ، ٣) (د) (٣ ، ٠)

[١١] العلاقة : ٢ س + ٧ ص = ١٤ يمثلها مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢)

(جـ) (٧ ، ٠) (د) (٠ ، ٧)

[١٢] الجدول المقابل يمثل علاقة بين س ، ص

أى مما يأتى يعبر عن هذه العلاقة ؟

س	١	٢	٣	٤
ص	-٢	-٥	-٨	-١١

(أ) س + ص = -١ (ب) س - ص = ٣

(جـ) ٣ س + ص = ١ (د) ص = - س - ٣

[١٣] الجدول المقابل يبين علاقة س ، ص

وهى ....

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

(أ) ص = س + ٤ (ب) ص = س + ١

(جـ) ص = ٢ س - ١ (د) ص = ٣ س - ٢

[١٤] العلاقة التى تعبر عن الزوجين المرتبين (٢ ، ١) ، (٤ ، ٣) معًا هى ....

(أ) ص = $\frac{١}{٢}$ س (ب) ص = ٢ س - ٥

(جـ) ص = س - ١ (د) ص = ٣ س + ٣

---

[١٦] عددان طبيعيان زوجيان ضعف أولهما مضاف إليه ثانيهما يساوى ١٢

أوجد الإمكانات المختلفة للعددين.

تطبيق هندسى

١٧ مستطيل محيطه ١٤ سم ، ما الإمكانات المختلفة لكل من طوله وعرضه علمًا بأن كلاً منهما ∈ $ص_+$ ؟

تطبيقات حياتية

١٨ مع عصام ١٠ ورقات مالية فئة ٥ جنيهات ، وأوراق مالية فئة ٢٠ جنيهًا ، اشترى عصام من المركز التجارى بما قيمته ٦٥ جنيهًا ، حدد الإمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام الأوراق المالية التى معه ، وأوجد العلاقة بين عدد كل منها ومثلها بيانيًا.

---

١٩ إذا كان ثمن طاولة الكمبيوتر ١٠٠ جنيه ، وثمن الكرسى ٥٠ جنيهًا ، فإذا باع المتجر فى أحد الأسابيع بمبلغ ٥٠٠ جنيه ، فما هى التوقعات الممثلة لعدد الطاولات التى باعها ، وعدد الكراسى ؟ مثل هذه العلاقة بيانيًا.

للمتفوقين

٢٠ مثلث متساوى الساقين محيطه ١٩ سم ، ما الإمكانات المختلفة لأطوال أضلاعه علمًا بـأن أطـوال أضلاعـه ∈ $ص_+$ ؟ لاحظ أن : مجموع طولى أى ضلعين فــى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

عجائب الأرقام

اختر عددًا من ١ إلى ٩، اضربه × ٣، اجمع ٣ على الناتج
اضرب الناتج × ٣ مرة أخرى "استخدم الحاسبة"
أوجد مجموع أرقام العدد الناتج ـ النتيجة النهائية دائمًا ٩



الدرس 2

ميل الخط المستقيم

• إذا تحركت نقطة على خط مستقيم ل من

الموضع أ ($س_1$ ، $ص_1$) إلى

الموضع ب ($س_2$ ، $ص_2$) فإن :

* التغير فى الإحداثى السينى = $س_2 - س_1$

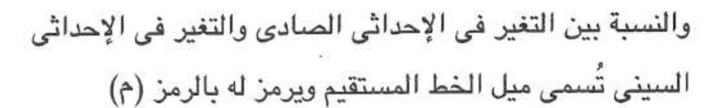
، ويُسمى بالتغير الأفقى.

* التغير فى الإحداثى الصادى = $ص_2 - ص_1$

، ويُسمى بالتغير الرأسى.

والنسبة بين التغير فى الإحداثى الصادى والتغير فى الإحداثى السينى تُسمى ميل الخط المستقيم ويرمز له بالرمز (م)

تعريف



ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$ أى أن :

• $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث $س_1 \neq س_2$

• م غير معرف إذا كان : $س_1 = س_2$

مثال ١

فى الشكل المقابل :

أوجد ميل الخط المستقيم ل

الحل

نعين نقطتين على المستقيم ل وليكن أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٣)

$\because$ م $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ $\therefore$ م $= \frac{٣ - ٢}{٣ - ١} = \frac{١}{٢}$

ملاحظة

فى المثال السابق : لاحظ أننا إذا استخدمنا نقطتين أخريين من نقط المستقيم لإيجاد ميله

مثل : حـ (−٣ ، صفر) ، ء (−١ ، ١)

نجد أن : م $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{١ - صفر}{-١ - (-٣)} = \frac{١}{٢}$ وهى نفس النتيجة السابقة.

أى أن : ميل المستقيم ثابت ولا يتوقف على اختيارنا لأى نقطتين عليه.

مثال ٢

أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتى :

١ (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٥)

٢ (١ ، ٣) ، (٤ ، ٢)

٣ (−٢ ، −٣) ، (−٤ ، ١)

٤ (٣ ، ١) ، (−١ ، ٠)

الحل

١ م $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٥ - ٤}{٤ - ٢} = \frac{١}{٢}$

٢ م $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٢ - ٣}{٤ - ١} = \frac{-١}{٣}$

٣ م $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{١ - (-٣)}{-٤ - (-٢)} = \frac{٤}{-٢} = -٢$

٤ م $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٠ - ١}{-١ - ٣} = \frac{-١}{-٤} = \frac{١}{٤}$

حاول بنفسك ١

أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتى :

١ (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤)

٢ (٣ ، −٥) ، (−٤ ، ٢)

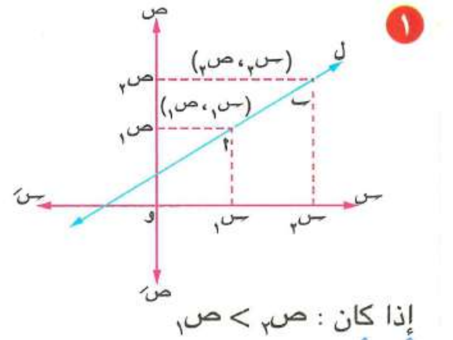
٣ (−٣ ، −١) ، (١ ، ٠)

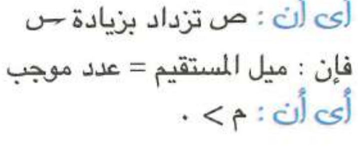
٤ (−٦ ، ٣) ، (−٤ ، ٢)

ملاحظتان

• إذا تحركت نقطة على خط مستقيم من الموضع أ ($س_1$ ، $ص_1$) إلى الموضع ب ($س_2$ ، $ص_2$) بحيث كان $س_2 > س_1$ فإن :

١





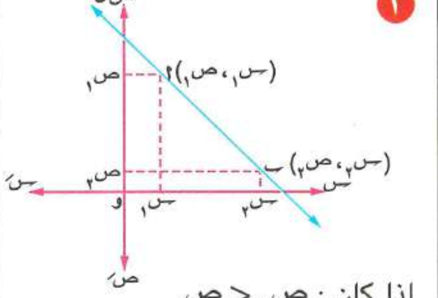
إذا كان : $ص_2 > ص_1$

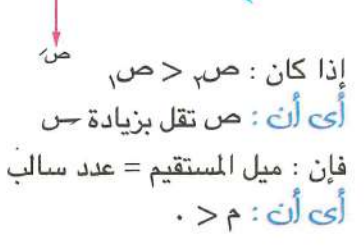
أى أن : ص تزداد بزيادة س

فإن : ميل المستقيم = عدد موجب

أى أن : م > ٠

٢





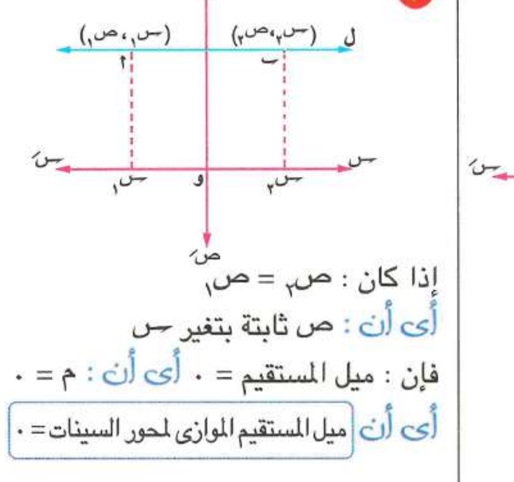
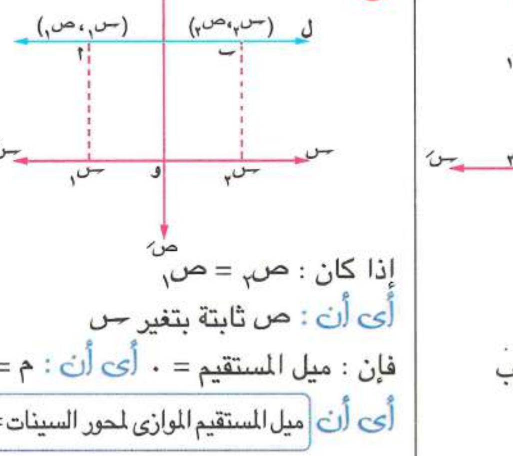
إذا كان : $ص_2 < ص_1$

أى أن : ص تقل بزيادة س

فإن : ميل المستقيم = عدد سالب

أى أن : م < ٠

٣

إذا كان : $ص_2 = ص_1$

أى أن : ص ثابتة بتغير س

فإن : ميل المستقيم = ٠ أى أن : م = ٠

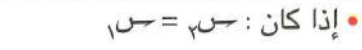
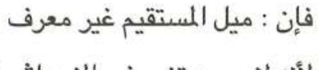
أى أن ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ٠

• إذا كان : $س_2 = س_1$

فإن : ميل المستقيم غير معرف

لأنه لا يوجد تغير فى الإحداثى السينى

أى : $س_2 - س_1 = ٠$

أى أن : ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف.

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

أكمل كلاً مما يأتى بوضع إحدى الكلمات

(موجب ، سالب ، صفر ، غير معرف) مكان النقط :



١ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ .... | ٢ ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ....

٣ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ .... | ٤ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ....

الحـــل

١ سالب. | ٢ صفر.

٣ موجب. | ٤ غير معرف.

مثال ٤

إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (−٣ ، ٤) ، (١ ، ص) هو ٢ **فأوجد قيمة : ص**

الحـــل

$\because$ م = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ $\therefore$ ٢ = $\frac{\text{ص} - ٤}{١ - (-٣)}$ $\therefore$ ٢ = $\frac{\text{ص} - ٤}{٤}$

$\therefore$ ص − ٤ = ٢ × ٤ $\therefore$ ص − ٤ = ٨ $\therefore$ ص = ١٢

ملاحظة هامة

وجدنا مما سبق أن ميل أى مستقيم ثابت ولا يتوقف على اختيارنا لأى نقطتين عليه ومن ذلك لإثبات أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة فإننا نوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ فإذا كان ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ فإن : أ ، ب ، حـ تكون على استقامة واحدة.

مثال ٥

أثبت أن النقط : أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٢) ، حـ (٨ ، ٠) تقع على استقامة واحدة.

الحل

∵ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢ - ٣}{٤ - ٢} = \frac{-١}{٢}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بحـ} = \frac{٠ - ٢}{٨ - ٤} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ وهما مشتركان فى نقطة ب

∴ النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

مثال ٦

إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ تقع على مستقيم واحد حيث :

أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، -١) ، حـ (١ ، ك) فأوجد قيمة : ك

الحل

∵ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{-١ - ٢}{٥ - ٣} = \frac{-٣}{٢}$

، ميل $\overleftrightarrow{بحـ} = \frac{ك + ١}{١ - ٥} = \frac{ك + ١}{-٤}$

، ∵ أ ، ب ، حـ تقع على مستقيم واحد ، ميل المستقيم ثابت لأى زوج من النقط يقع عليه.

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ ∴ $\frac{-٣}{٢} = \frac{ك + ١}{-٤}$ ∴ ٢ (ك + ١) = -٣ × (-٤)

∴ ٢ ك + ٢ = ١٢ ∴ ٢ ك = ١٠ ∴ ك = ٥

حاول بنفسك ٢

(١) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -١) ، (٧ ، أ) هو $\frac{٣}{٤}$ **فأوجد قيمة : أ**

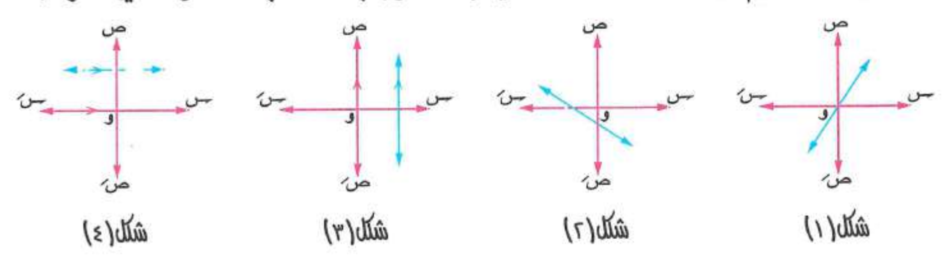
(٢) **أثبت أن :** حـ (-١ ، ٢) ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٤)

تمارين
12 على ميل الخط المستقيم

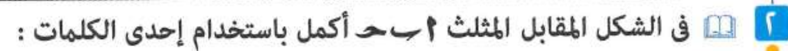


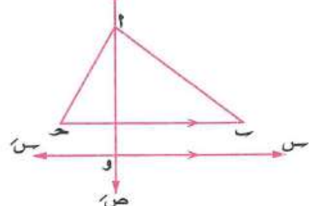
● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ صنف ميل المستقيم فى كل من الأشكال الآتية بأنه (موجب – سالب – صفر – غير معرف) :



٢ 📖 فى الشكل المقابل المثلث أ ب حـ أكمل باستخدام إحدى الكلمات :







٣ أكمل ما يأتى :

[١] ميل أى مستقيم أفقى يساوى ....

[٢] ميل أى مستقيم يوازى محور الصادات ....

[٣] المستقيم الذى ميله = صفر يكون موازيًا لمحور ....

[٤] إذا كانت : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة فإن : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل ....

٤ أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتى :

[١] أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٤)

[٢] 📖 أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٠)

[٣] أ (٣ ، ٢) ، ب (٦ ، ٥)

[٤] 📖 أ (٢ ، –١) ، ب (٤ ، –١)

[٥] أ (١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٣)

[٦] أ (٥ ، ٢) ، ب (٥ ، ٤)

[٧] أ (٣ ، −١) ، ب (٣ ، ٢)

[٨] أ (٣ ، −٢) ، ب (٤ ، ١)

[٩] أ (−١ ، ٣) ، ب (٢ ، ١)

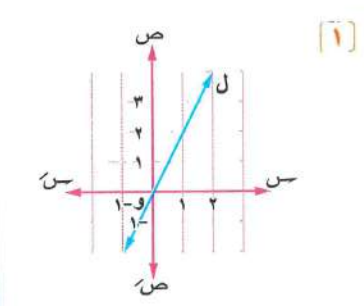
[١٠] ن (٤ ، −٢) ، ك (−١ ، −٧)

[١١] هـ (−٣ ، −١) ، و (٠ ، ٠)

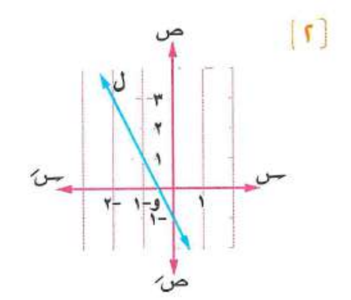
[١٢] أ (−٦ ، −٩) ، ب (−١ ، −١)

٥ أوجد ميل المستقيم ل فى كل من الشكلين الآتيين :

[١]



[٢]



٦ فى الشكل المقابل :

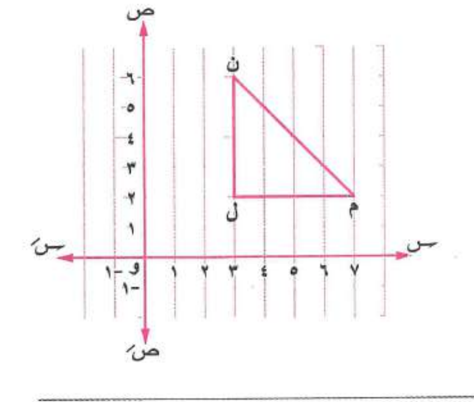
ل م ن مثلث قائم الزاوية فى ل

، ق (∠ م) = ٤٥°

فإذا كان : ل (٣ ، ٢) ، م (٧ ، ٢)

أوجد إحداثيى ن

واحسب ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$



٧ إذا كانت : أ (٢ ، −١) ، ب (١٠ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٣)

أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ أ}}$ ، وارسم المثلث أ ب حـ على الشبكة التربيعية

، ثم حدد نوع المثلث أ ب حـ بالنسبة لقياسات زواياه.

٨ إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ك) يساوى ٣

فأوجد قيمة : ك

«٩»

٩ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، حـ) ، (٥ ، −٢) يساوى −٣

فأوجد قيمة : حـ «٤»

---

١٠ إذا كان : أ (−١ ، ٤) ، ب (−س ، ٢) وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = −٢

فأوجد قيمة : س «صفر»

---

١١ إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطتين (−٢ ، ص) ، (٣ ، −١) ميله = −٦, ٠

فأوجد قيمة : ص «٢»

---

١٢ أوجد قيمة ك بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٢ ، ك)

موازيًا محور السينات. «٤»

---

١٣ أوجد قيمة س بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٢ س ، ٣) ، (٦ ، ٧)

موازيًا محور الصادات. «٣»

---

١٤ أوجد قيمة ص بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٦) ، (−٢ ، ٣ ص)

عموديًا على محور الصادات. «٢»

---

١٥ هل تقع النقاط (−٥ ، ١١) ، (٠ ، ٨) ، (٥ ، ٥) على نفس الخط المستقيم ؟

---

١٦ إذا كانت : أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٤ ، ٥)

أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ومثل كلًا منها بيانيًا ماذا تلاحظ ؟

---

١٧ **فى كل مما يأتى أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة :**

[١] أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (−٣ ، −٣)

[٢] أ (٤ ، −٣) ، ب (−٦ ، ٧) ، حـ (٥ ، −٤)

[٣] أ (−٢ ، ١٢) ، ب (٢ ، ٤) ، حـ (٦ ، −٤)

١٨ **في كل مما يأتي أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ لا تقع على استقامة واحدة :**

[١] أ(٢ ، ١) ، ب(٣ ، ٠) ، حـ(٥ ، -١)

[٢] أ(-١ ، ٢) ، ب(٣ ، ١) ، حـ(٧ ، ٢)

[٣] أ(٠ ، -٣) ، ب(٢ ، ٢) ، حـ(-٣ ، -٣)

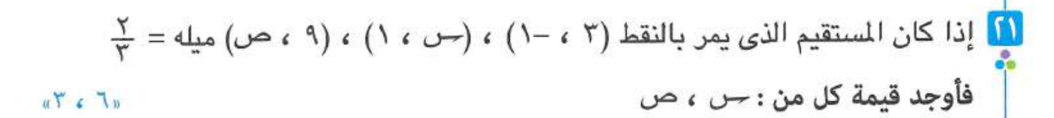
---

١٩ أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(-١ ، ٣) ، ب(٢ ، ٥)

، هل النقطة حـ(٨ ، ١) ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ؟ «$\frac{٢}{٣}$»

---

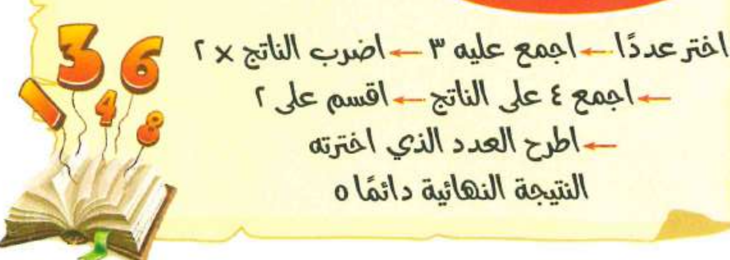
٢٠ أوجد ص بحيث تكون النقط (٤ ، ١) ، (-٢ ، ٧) ، (٣ ، ص) على استقامة واحدة. «٢»



للمتفوقين

٢١ إذا كان المستقيم الذي يمر بالنقط (٣ ، -١) ، (س ، ١) ، (٩ ، ص) ميله = $\frac{٢}{٣}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص «٦ ، ٣»





الدرس **3**

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

• درسنا فيما سبق أنه إذا كانت هناك علاقة خطية بين متغيرين س ، ص فإن :

$$\text{ميل الخط المستقيم الذى يمثل هذه العلاقة} = \frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}}$$

أى أن : ميل الخط المستقيم (م) يعبر عن معدل التغير فى ص بالنسبة إلى س

• ويوجد فى حياتنا العديد من التطبيقات التى نحتاج فيها لمعرفة معدل التغير :

فمثلاً :

(١) إذا كان الشكل المقابل يمثل حركة سيارة فإن :

السرعة المنتظمة للسيارة (ع)

= معدل التغير فى المسافة (ف) بالنسبة للزمن (ن)

أى أن :

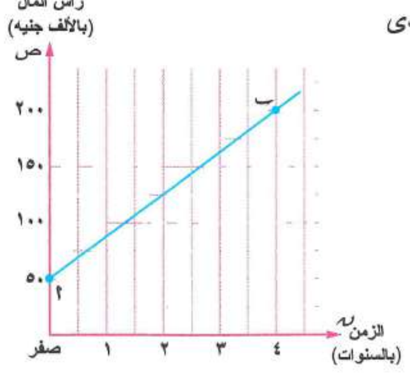
السرعة المنتظمة للسيارة (ع)

= ميل الخط المستقيم (م)

وباختيار نقطتين على المستقيم مثل أ (٢ ، ٨٠) ، ب (٥ ، ٢٠٠)

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ف}_٢ - \text{ف}_١}{\text{ن}_٢ - \text{ن}_١} = \frac{٢٠٠ - ٨٠}{٥ - ٢} = \frac{١٢٠}{٣} = ٤٠ \text{ كم/ساعة}$$

٢ إذا كان الشكل المقابل يمثل التغير فى رأس مال إحدى الشركات (ص) بمرور الزمن (ن) فإن :



معدل التغير فى رأس مال الشركة

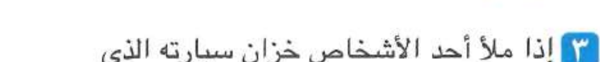
= ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

∴ معدل التغير فى رأس المال

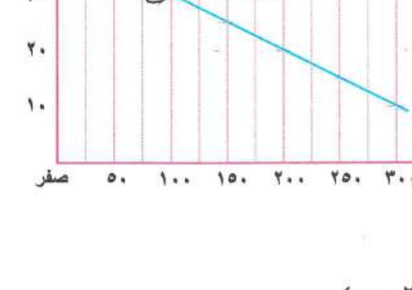
$$= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1} = \frac{٢٠٠ - ٥٠}{٤ - ٠} = \frac{١٥٠}{٤}$$

= ٣٧,٥ ألف جنيه/سنة.

أى أن : رأس مال الشركة يتزايد بمعدل = ٣٧,٥ × ١٠٠٠ = ٣٧٥٠٠ جنيه سنويًا.



٣ إذا ملأ أحد الأشخاص خزان سيارته الذى سعته ٤٠ لترًا بالوقود وبعد أن قطع مسافة ١٠٠ كم وجد أن المتبقى بالخزان من الوقود ٣٠ لترًا والشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة المقطوعة بالكيلو متر (ف) وكمية الوقود المتبقية بالخزان باللتر (ص) :



ويكون معدل استهلاك الوقود

= ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

أى أن : معدل استهلاك الوقود $= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{ف}_2 - \text{ف}_1} = \frac{٣٠ - ٤٠}{١٠٠ - ٠}$

$$= \frac{-١٠}{١٠٠} = -\frac{١}{١٠}$$ لتر/كيلو متر.

والإشارة السالبة تدل على أن كمية الوقود تتناقص بالخزان بمعدل واحد لتر لكل ١٠ كم

مثال ١

تحرك وليد بدراجته من مدينة القاهرة إلى مدينة بنها ثم عاد إلى القاهرة ، والشكل البيانى المقابل يمثل حركته خلال رحلتى الذهاب والعودة.

١ أوجد سرعته خلال رحلة الذهاب.

٢ أوجد سرعته خلال رحلة العودة.

٣ أوجد السرعة المتوسطة له أثناء الرحلة كلها.

٤ بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل ؟

ف (بالكيلومتر)
٥٠ ٤٠ ٣٠ ٢٠ ١٠
ب ، حـ ، ء ، أ
ن (بالساعة)
صفر ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠

الحل

١ بأخذ النقطتين أ (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٥٠)

∴ ع (خلال رحلة الذهاب) = $\frac{٥٠ - ٠}{٤ - ٠}$ = ١٢,٥ كم/ ساعة.

٢ بأخذ النقطتين حـ (٥ ، ٥٠) ، ء (١٠ ، ٠)

∴ ع (خلال رحلة العودة) = $\frac{٠ - ٥٠}{١٠ - ٥}$ = $\frac{-٥٠}{٥}$ = -١٠ كم/ ساعة.

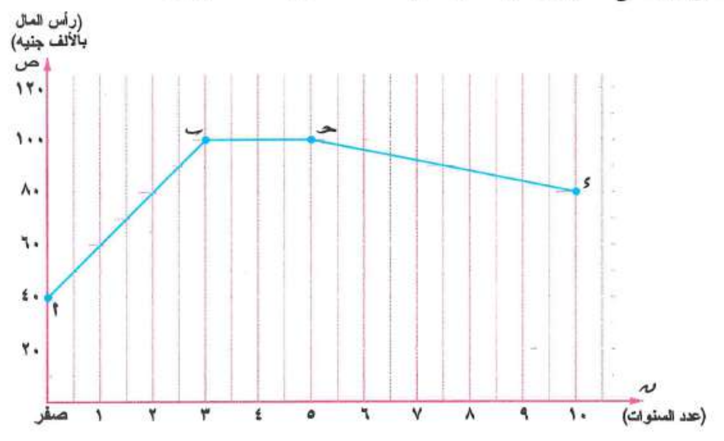
والإشارة السالبة تعنى أن وليد تحرك فى عكس اتجاه حركته الأولى عائدًا إلى القاهرة بسرعة ١٠ كم/ ساعة.

٣ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى الذى قطعت فيه المسافة}}$ = $\frac{١٠٠}{١٠}$ = ١٠ كم/ ساعة.

٤ القطعة المستقيمة الأفقية تبين أن وليد توقف لمدة ساعة بعد أن سار مسافة ٥٠ كم ثم سار بعد ذلك راجعًا إلى نقطة البدء.

مثال ٢

الشكل التالى يوضح تغير رأس مال شركة ما خلال ١٠ سنوات.



١ أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـء}$ ما دلالة كل منها ؟

٢ احسب رأس مال الشركة عند بدء عملها.

الحـــل

∵ أ (٠ ، ٤٠) ، ب (٣ ، ١٠٠) ، حـ (٥ ، ١٠٠) ، ء (١٠ ، ٨٠)

١ • ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١٠٠ - ٤٠}{٣ - ٠} = \frac{٦٠}{٣} = ٢٠$

وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال الثلاث سنوات الأولى من بدء عملها بمعدل ٢٠٠٠٠ جنيه كل عام.

• ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ = $\frac{١٠٠ - ١٠٠}{٥ - ٣} = \frac{٠}{٢} = ٠$

وهو يعبر عن أن رأس مال الشركة ظل ثابتًا بدون زيادة أو نقصان خلال السنتين الرابعة والخامسة من بدء عملها.

• ميل $\overleftrightarrow{حـء}$ = $\frac{٨٠ - ١٠٠}{١٠ - ٥} = \frac{-٢٠}{٥} = -٤$

وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال الخمس سنوات الأخيرة بمعدل ٤٠٠٠ جنيه كل عام.

٢ ∵ أ (٠ ، ٤٠) ∴ رأس مال الشركة عند بدء عملها = ٤٠٠٠٠ جنيه.

مثال ٣

خزان مياه مملوء بأسفله صنبور مفتوح والشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن (ن) بالدقائق وكمية المياه المتبقية فى الخزان (ح) باللترات.

ح (باللترات)
٨٠٠
٧٠٠
٦٠٠
٥٠٠
٤٠٠
٣٠٠
٢٠٠
١٠٠
(١٠، ٥٠٠) أ
(٢٠، ٢٥٠) ب
ن (بالدقائق)
صفر ٥ ١٠ ١٥ ٢٠ ٢٥ ٣٠

١ ما هى أكبر سعة للخزان ؟

٢ ما هو الزمن اللازم ليفرغ الخزان ؟

٣ كم يتبقى فى الخزان بعد ٢٠ دقيقة ؟

٤ ما هو متوسط تفريغ الخزان ؟

الحل

١ من الرسم البيانى نجد أن :

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع المحور الذى يمثل كمية المياه المتبقية بالخزان (ح) فى النقطة (٠ ، ٧٥٠)

∴ أكبر سعة للخزان = ٧٥٠ لترًا.

٢ من الرسم البيانى نجد أن : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع المحور الذى يمثل الزمن (ن) فى النقطة (٣٠ ، ٠)

∴ الزمن اللازم لكى يفرغ الخزان = ٣٠ دقيقة.

٣ ∵ النقطة (٢٠ ، ٢٥٠) $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$

∴ بعد ٢٠ دقيقة يتبقى فى الخزان ٢٥٠ لترًا.

٤ متوسط تفريغ الخزان = ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{ح_٢ - ح_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{٢٥٠ - ٥٠٠}{٢٠ - ١٠} = \frac{-٢٥٠}{١٠} = -٢٥$

∴ الخزان يفرغ بمعدل = ٢٥ لتر/دقيقة.



تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم



اختبـــار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات أسئلة كتاب الوزارة

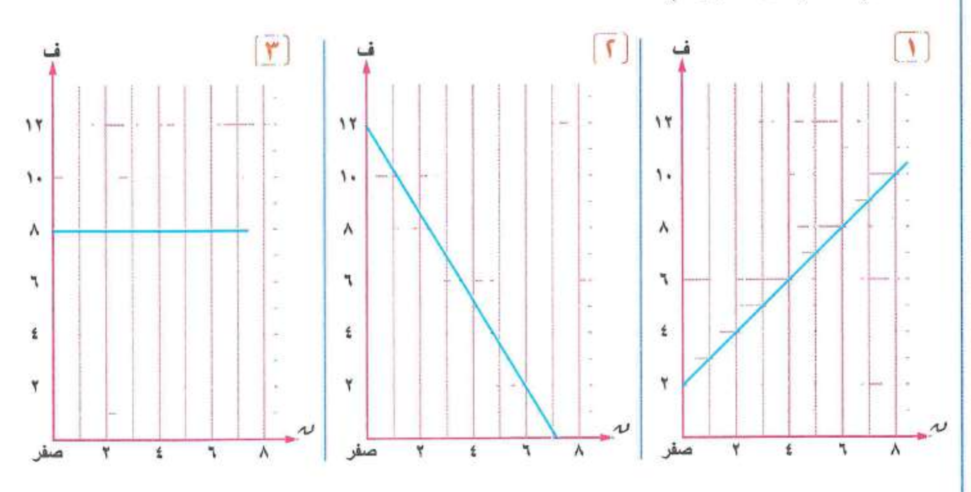
١ سيارة تسير بسرعة منتظمة بحيث تقطع ١٨٠ كم كل ٣ ساعات فإذا سارت السيارة لمدة ٥ ساعات فما هى المسافة التى تقطعها ؟ «٣٠٠ كم»

---

٢ تستهلك آلة للرى ٢,٤٧ من اللتر من السولار لتشغيلها ٣ ساعات ، فإذا عملت الآلة ١٠ ساعات فكم لترًا من السولار سوف تستهلك الآلة ؟ «$8\frac{7}{30}$ لتر»

---

٣ كلٌّ من الأشكال التالية يوضح العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن(بالثانية) لجسم. حدد موضع الجسم عند بدء الحركة ، وعند ن = ٦ ثوانٍ ، وأوجد ميل المستقيم فى كل حالة (ماذا يمثل الميل ؟)

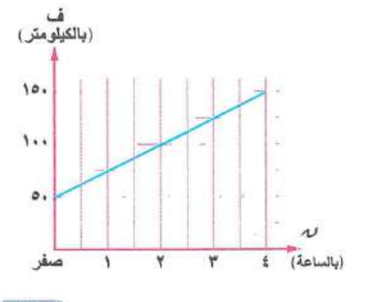


---

٤ الشكل المقابل يمثل حركة سيارة تسير بسرعة منتظمة.

عين سرعة السيارة.

«٢٥ كم/ ساعة»

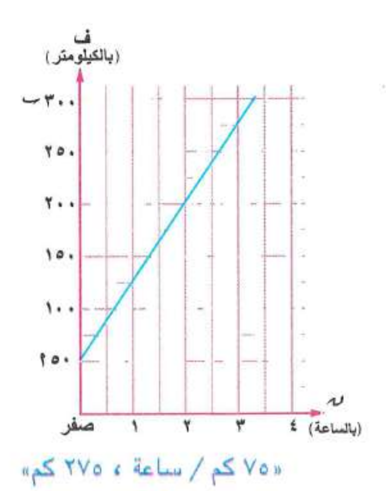


٥ تحرك باسم بسيارته بين المدينتين ٢ ، ب والشكل البيانى المقابل يوضح العلاقة بين المسافة (ف) بالكيلو متر والزمن (ن) بالساعة.

أجب عما يأتى :

[١] ما مقدار السرعة المنتظمة لسيارة باسم ؟

[٢] أوجد المسافة التى تبعدها السيارة عن نقطة (و) بعد مرور ٣ ساعات من بداية الحركة.



«٧٥ كم / ساعة ، ٢٧٥ كم»

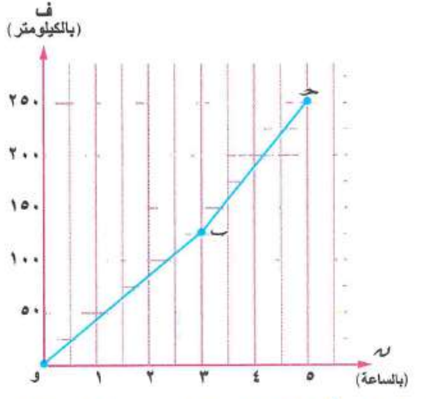
---

٦ الشكل المقابل يمثل حركة سيارة.

أجب عما يأتى :

[١] أوجد سرعة السيارة خلال الساعات الثلاث الأولى من حركتها ثم خلال الساعتين التاليتين.

[٢] أوجد السرعة المتوسطة للسيارة أثناء الرحلة كلها.



« $\frac{2}{3}$٤١ كم / ساعة ، $\frac{1}{2}$٦٢ كم / ساعة ، ٥٠ كم / ساعة»

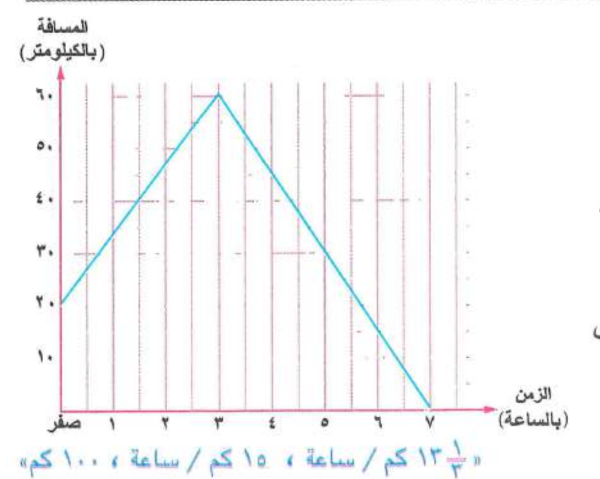
---

٧ الشكل المقابل يمثل حركة دراجة مقيسة من نقطة ثابتة.

أجب السرعة المنتظمة للدراجة :

[١] خلال الساعات الثلاث الأولى.

[٢] خلال الساعات الأربع التالية ، ثم أوجد المسافة الكلية التى تحركتها الدراجة.

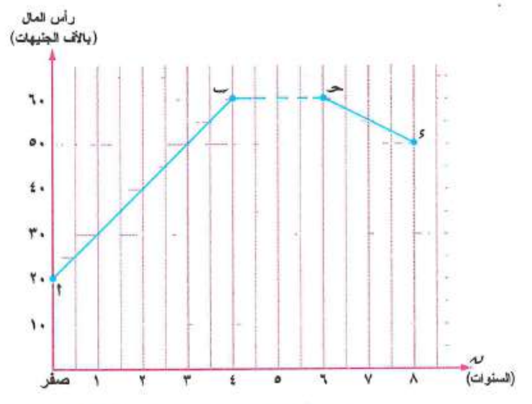


« $\frac{1}{3}$١٣ كم / ساعة ، ١٥ كم / ساعة ، ١٠٠ كم»

٨ الشكل المقابل يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات.

[١] أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب ح}$ ، $\overleftrightarrow{ح ء}$ ، وما دلالة كل منها ؟

[٢] احسب رأس مال الشركة عند بدء عملها.



«١٠ ، صفر ، -٥ ، ٢٠ ألف جنيه»

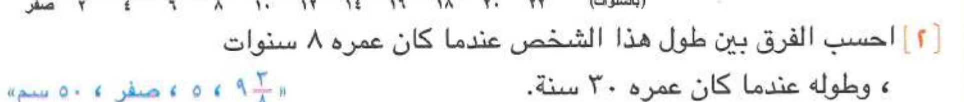
---

٩ الشكل المقابل يوضح العلاقة بين طول شخص بالسنتيمتر وعمره بالسنوات.



[١] أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب ح}$ ، $\overleftrightarrow{ح ء}$ ، وما دلالة كل منها ؟

[٢] احسب الفرق بين طول هذا الشخص عندما كان عمره ٨ سنوات ، وطوله عندما كان عمره ٣٠ سنة.



«$٩\frac{٣}{٨}$ ، ٥ ، صفر ، ٥٠ سم»

---

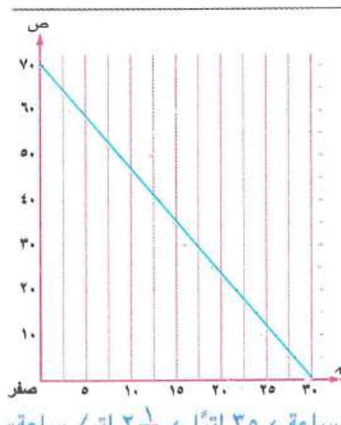
١٠ ملأ مجدى خزان سيارته بالوقود ، الشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن (ن) بالساعة وكمية الوقود المتبقية (ص) باللتر.

[١] ما هى أكبر سعة للخزان ؟

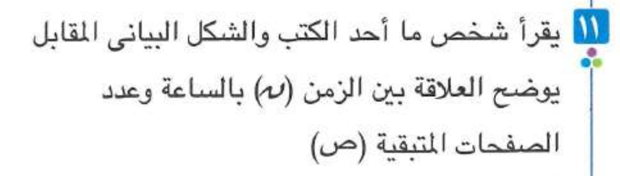
[٢] متى يفرغ الخزان ؟

[٣] كم يتبقى من الوقود بعد ١٥ ساعة ؟

[٤] ما معدل استهلاك الوقود فى الساعة الواحدة ؟



«٧٠ لترًا ، ٣٠ ساعة ، ٣٥ لترًا ، $٢\frac{١}{٣}$ لتر/ ساعة»



١١ يقرأ شخص ما أحد الكتب والشكل البيانى المقابل يوضح العلاقة بين الزمن (ن) بالساعة وعدد الصفحات المتبقية (ص)

[١] كم عدد صفحات الكتاب المتبقية عند بداية القراءة ؟

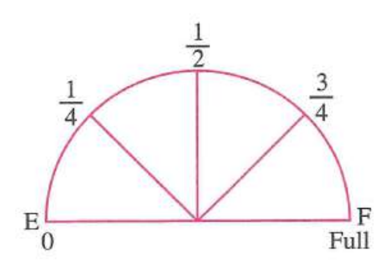
[٢] أوجد معدل الصفحات المقروءة فى الساعة.

[٣] متى ينتهى هذا الشخص من قراءة الكتاب ؟

«١٠٠ صفحة ، ٢٠ صفحة / ساعة ، بعد ٥ ساعات»

---

١٢ ملأ حازم خزان سيارته بالوقود ، وسعة هذا الخزان ٤٠ لترًا ، وبعد أن تحرك ١٢٠ كم ، وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{٣}{٤}$ سعة الخزان. ارسم الشكل البيانى الذى يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان والمسافة التى قطعتها السيارة (علمًا بأن هذه العلاقة خطية) ، واحسب المسافة التى تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان.



«٤٨٠ كم»

---

١٣ الشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة ف ، والزمن ن لحركة قطارين أ ، ب بين محطتين ، حيث ف (بالكيلو متر) ، ن (بالساعة)

استخدم الرسم لإيجاد قيمة :

[١] البعد بين المحطتين.

[٢] الزمن الذى استغرقه كل من القطارين.

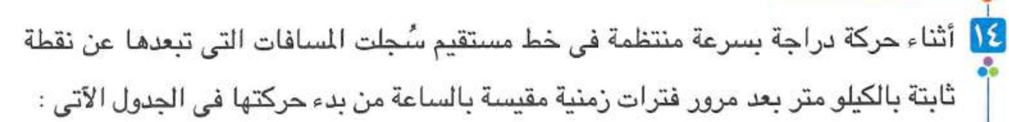
[٣] السرعة المتوسطة لكل منهما.

[٤] ما دلالة القطعة المستقيمة فى حركة القطار أ ؟

«١٠٠ كم ، ٢ ساعة ، ٢,٥ ساعة ، ٥٠ كم/ ساعة ، ٤٠ كم / ساعة»



للمتفوقين



١٤ أثناء حركة دراجة بسرعة منتظمة فى خط مستقيم سُجلت المسافات التى تبعدها عن نقطة ثابتة بالكيلو متر بعد مرور فترات زمنية مقيسة بالساعة من بدء حركتها فى الجدول الآتى :

المسافة التى تبعدها الدراجة عن النقطة الثابتة بالكيلو متر	١٢٥	١٥٠	١٧٥	٢٠٠
الزمن المنقضى حتى هذه المسافة بالساعة	٢	٤	٦	٨

مثل بيانيًا العلاقة بين المسافة التى تبعدها الدراجة عن النقطة الثابتة والزمن المنقضى

ومن الرسم أوجد :

[١] سرعة الدراجة بالكيلو متر/ ساعة.

[٢] المسافة التى تبعدها الدراجة عن النقطة الثابتة بعد مرور ٣٠٠ دقيقة.

[٣] الزمن الذى عنده تكون الدراجة على بعد ١٨٧,٥ كم من النقطة الثابتة.

[٤] بعد نقطة البداية للدراجة عن النقطة الثابتة.

«١٢,٥ كم/ ساعة ، ١٦٢,٥ كم ، ٧ ساعات ، ١٠٠ كم»

عجائب الأرقام

أوجد ناتج ضرب العدد ٩٩ فى الأعداد الطبيعية
من ١ إلى ١٠
سجل إجابتك فى كل مرة. ماذا تلاحظ على النواتج ؟!

الوحدة الثالثة

الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات وتنظيمها.

الدرس الثانى : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيًا.

الدرس الثالث : الوسط الحسابى.

الدرس الرابع : الوسيط.

الدرس الخامس : المنوال.

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- ينظم البيانات فى جداول تكرارية ذات مجموعات.
- يكون كلًا من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- يمثل كلًا من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- يوجد الوسط الحسابى لمجموعة من البيانات منظمة فى جدول تكرارى ذى مجموعات.
- يوجد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات.
- يحسب المنوال من جدول تكرارى ذى مجموعات.

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح **QR code** الخاص بكل امتحان







جمع البيانات وتنظيمها

تعرفنا فى العام الماضى على كيفية تنظيم البيانات وعرضها فى جداول تكرارية بسيطة ، ولكن عندما يكون حجم البيانات كبيرًا فإنه من المفيد عند تنظيمها تقسيم هذه البيانات إلى عدد مناسب من المجموعات ، وتحديد عدد المفردات التى تنتمى إلى كل مجموعة.

الجدول الذى يتكون من المجموعات والتكرار المناظر لكل مجموعة يُسمى الجدول التكرارى ذى المجموعات.

والمثال التالى يوضح كيفية تنظيم البيانات فى مثل هذه الجداول.

مثال

فيما يلى درجات ٥٤ طالبًا فى أحد فصول الصف الثانى الإعدادى بإحدى المدارس التى حصلوا عليها فى اختبار لمادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٦٠ درجة.

٤٢	٥٤	٣٦	٤٦	٣٤	٤٥	٥١	٤٠	٤٨
٤٨	٤٠	٤٧	٢٥	٤٨	٤٥	٣٦	٥٦	٤٤
٣٨	٤٧	٣٠	٣٧,٥	٤٠	٢٠	٤٢	٢٨	٥٠
٤٧	٥٥	٢٧	٤٥	٣٠	٤٢	٥١	٤٣	٤٦
٢٩	٤٣	٥٩	٣٥	٤٤,٥	٣٢	٢٤	٣٩	٥٤
٤١	٣٦	٤٥	٣٩	٤٢	٥٨	٣٥	٥٠	٤٥

المطلوب تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات.

الحـــل

١ نحدد المدى وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة.

∵ أصغر درجة هى ٢٠ وأكبر درجة هى ٥٩ ∴ المدى = ٥٩ − ٢٠ = ٣٩

٢ نقسم هذه البيانات إلى عدد مناسب من مجموعات الدرجات وليكن ١٠ مجموعات منفصلة طول كل منها ٤ فنحصل على المجموعات الآتية :

- المجموعة الأولى : الطلبة الحاصلون على ٢٠ درجة حتى أقل من ٢٤ درجة وتكتب (٢٠−)
- المجموعة الثانية : الطلبة الحاصلون على ٢٤ درجة حتى أقل من ٢٨ درجة وتكتب (٢٤−)
- المجموعة الثالثة : الطلبة الحاصلون على ٢٨ درجة حتى أقل من ٣٢ درجة وتكتب (٢٨−)

وهكذا حتى نصل إلى :

- المجموعة العاشرة : الطلبة الحاصلون على ٥٦ درجة حتى أقل من ٦٠ درجة وتكتب (٥٦−)

٣ نكون جدول التفريغ أو العلامات الآتى :

المجموعات	العلامات	التكرار
−٢٠	/	١
−٢٤	///	٣
−٢٨	////	٤
−٣٢	////	٤
−٣٦	~~////~~ //	٧
−٤٠	~~////~~ ~~////~~	١٠
−٤٤	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
−٤٨	~~////~~ //	٧
−٥٢	///	٣
−٥٦	///	٣
المجموع		٥٤

جدول التفريغ أو العلامات

٤ نحذف العمود الأوسط (العلامات) من الجدول فنحصل على الصورة النهائية للجدول التكرارى ذى المجموعات ويمكن كتابته رأسيًا أو أفقيًا ، والصورة الأفقية للجدول هى كالآتى :

المجموعات	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	٣٦-	٤٠-	٤٤-	٤٨-	٥٢-	٥٦-	المجموع
التكرار	١	٣	٤	٤	٧	١٠	١٢	٧	٣	٣	٥٤

ومن الجدول السابق نستنتج أن :

* المجموعة التى بها أكبر تكرار هى ٤٤-

* المجموعة التى بها أقل تكرار هى ٢٠-

حاول بنفسك

فيما يلى أوزان ٥٠ شخصًا :

٥٢	٣٥	٤٠	٥٧	٤٣	٤٠	٣٦	٤٩	٤٣	٥٨
٤٧	٤٨	٥١	٣٠	٥٩	٣٦	٤٥	٤١	٤٤	٣٧
٤٢	٥٤	٣٨	٥٥	٤٢	٤٧	٤٦	٣٤	٥٣	٤٤
٤٧	٣٢	٤١	٦٢	٥٠	٣٩	٥٨	٤٦	٤٣	٤٩
٤٠	٤١	٦٤	٤٤	٥٤	٤٥	٣٨	٤٠	٤٨	٤١

كون الجدول التكرارى ذى المجموعات.

تمارين 14

على جمع البيانات وتنظيمها

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ 📖 **فيما يلى الأجر الأسبوعى بالجنيهات لأربعين عاملًا فى أحد المصانع :**

٤٧	٧١	٣٦	٩٤	٥٤	٦٤	٨٧	٨٩	٦٢	٥٧
٥١	٦١	٤٤	٥٢	٧٠	٦٦	٥٦	٣٢	٦٩	٣٦
٧٩	٤٨	٧٧	٩٠	٦٥	٩٩	٩٦	٦٧	٦٠	٥٥
٩٥	٧٥	٨١	٨٤	٧٨	٣٨	٤٩	٩٤	٤٨	٥٩

والمطلوب عمل جدول تكرارى ذى مجموعات (خذ المجموعات الجزئية : ٣٠– ، ٤٠– ، ٥٠– ، ... ، ٩٠–) وما المجموعة التى بها أكبر تكرار ؟ وما المجموعة التى بها أقل تكرار ؟

---

٢ 📖 **فيما يلى درجات ٣٠ تلميذًا فى أحد الاختبارات :**

٢٥	٣٥	٤٠	٢٠	٣٠	٣٧	٤٠	٣٣	٢٢	٣٨
٣٥	٣٦	٢٨	٣٧	٣٩	٢٨	٣٢	٢٦	٢٩	٣٧
٢٣	٣٤	٣٥	٣٦	٢٩	٣٨	٤٠	٣٥	٣٧	٣١

المطلوب :

١ كون جدولًا تكراريًا ذى مجموعات لهذه الدرجات.

٢ أوجد عدد التلاميذ الممتازين إذا كانت أقل درجة ليكون التلميذ ممتازًا هى ٣٦ درجة. «١٢ تلميذًا»

---

٣ **فى أحد معسكرات التجنيد قيست أطوال ٥٥ جنديًا فكانت أطوالهم بالسنتيمترات كالآتى :**

١٦٩	١٩٤	٢٠٠	١٨٥	١٦٥	١٨٨	١٦٦	١٨٦	١٨١	١٧٦	١٧٣
١٧٧	١٧٩	١٨٨	١٧٠	١٩٣	١٨٠	١٧٣	١٧٣	١٨٤	١٩٢	١٦٧
١٨٢	١٦٨	١٨٦	١٨٩	١٧١	١٧٩	١٧٢	١٧٥	١٧٥	١٨١	١٦٦
١٨٥	١٧٧	١٧٥	١٦٥	١٩٠	١٧٢	١٧٧	١٧٨	١٨٤	١٦٦	١٧٤
١٧٨	١٧٧	١٧٢	١٧٤	١٧٥	١٧٩	١٩٥	١٧٦	١٨٩	١٨٧	١٨٩

أوجد أقل طول وأكبر طول والمدى الذى يقع فيه هذان الطولان.

كون جدولًا تكراريًا باستخدام المجموعات (١٦٥– ، ١٧٠– ، ١٧٥– ، ...)

من الجدول أوجد :

١ عدد الجنود الذين أطوالهم أقل من ١٨٥ سم «٣٩ جنديًا»

٢ النسبة المئوية لعدد الجنود الذين أطوالهم على الأقل ١٨٠ سم «٤٠٪»



الدرس **2**

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيًا

تمهيد

• فى الدرس السابق درست كيفية تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات والحصول منه على بعض المعلومات كالجدول التالى الذى يمثل توزيع أجور ٥٠ عاملاً أسبوعيًا فى أحد المصانع :

مجموعات الأجور	٥٤–	٥٨–	٦٢–	٦٦–	٧٠–	المجموع
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤	٥٠

ومن خلال هذا الجدول يمكنك معرفة عدد العمال (التكرار) فى كل مجموعة على حدة.

فمثلًا : – عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٥٨ جنيهًا وأقل من ٦٢ جنيهًا **١٢** عاملاً.

– عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٦ جنيهًا وأقل من ٧٠ جنيهًا **٧** عمال.

• **ولكنك لا تستطيع معرفة بعض المعلومات الأخرى من هذا الجدول مباشرة مثل :**

– عدد العمال الذين يحصلون على أقل من ٦٢ جنيهًا.

– عدد العمال الذين يحصلون على ٥٨ جنيهًا فأكثر.

• **وحتى تستطيع معرفة مثل هذه المعلومات ، ستحتاج لدراسة نوع آخر من الجداول وهى الجداول التكرارية المتجمعة (الصاعدة والنازلة). وهذا ما سنوضحه فى الأمثلة التالية :**

مثال ١

الجدول التكرارى التالى يبين الأجر الأسبوعى بالجنيه لعدد ٥٠ عاملاً فى أحد المصانع :

مجموعات الأجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-	المجموع
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤	٥٠

والمطلوب تكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا ثم إيجاد :

١ عدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيهًا.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيهًا.

الحــل

• **نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كالتالى :**

مجموعات الأجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤

أقل من ٥٤ = صفر

أقل من ٥٨ = ٥

أقل من ٦٢ = ٥ + ١٢ = ١٧

أقل من ٦٦ = ٥ + ١٢ + ٢٢ = ٣٩

أقل من ٧٠ = ٥ + ١٢ + ٢٢ + ٧ = ٤٦

أقل من ٧٤ = ٥ + ١٢ + ٢٢ + ٧ + ٤ = ٥٠

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٥٤	صفر
أقل من ٥٨	٥
أقل من ٦٢	١٧
أقل من ٦٦	٣٩
أقل من ٧٠	٤٦
أقل من ٧٤	٥٠

«الجدول التكرارى المتجمع الصاعد»

لاحظ أن : التكرار المتجمع الصاعد يبدأ بالصفر وينتهى بالتكرار الكلى.

• ولتمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد بيانيًا نتبع الآتى :

١ نخصص المحور الأفقى للمجموعات والمحور الرأسى للتكرار المتجمع الصاعد.

٢ نختار مقياسًا مناسبًا للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحور للتكرار الكلى المتجمع الصاعد.

٣ نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة ونرسم الخط البيانى لها بالتتابع كما هو موضح بالشكل المقابل.

«المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد»

• **ومن الرسم نجد أن :**

١ عدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيهًا = ١٠ عمال.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيهًا = $\frac{١٠}{٥٠}$ × ١٠٠٪ = ٢٠٪

مثال ٢

الجدول التكرارى التالى يبين الأجر الأسبوعى بالجنيه لعدد ٥٠ عاملًا فى أحد المصانع :

مجموعات الأجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-	المجموع
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤	٥٠

والمطلوب تكوين الجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيله بيانيًا ثم إيجاد :

١ عدد العمال الذين مرتباتهم ٦٠ جنيهًا فأكثر.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم ٦٠ جنيهًا فأكثر.

الحــــل

• نكون الجدول التكرارى المتجمع النازل كالتالى :

مجموعات الأجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤

٥٤ فأكثر ٥ + ١٢ + ٢٢ + ٧ + ٤ = ٥٠

٥٨ فأكثر ١٢ + ٢٢ + ٧ + ٤ = ٤٥

٦٢ فأكثر ٢٢ + ٧ + ٤ = ٣٣

٦٦ فأكثر ٧ + ٤ = ١١

٧٠ فأكثر ٤

٧٤ فأكثر صفر

«الجدول التكرارى المتجمع النازل»

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل (الهابط)
٥٤ فأكثر	٥٠
٥٨ فأكثر	٤٥
٦٢ فأكثر	٣٣
٦٦ فأكثر	١١
٧٠ فأكثر	٤
٧٤ فأكثر	صفر

لاحظ أن : التكرار المتجمع النازل يبدأ بالتكرار الكلى وينتهى بالصفر.

• ولتمثيل هذا الجدول نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد فنحصل على الشكل المقابل.

التكرار المتجمع النازل

١٠ ٢٠ ٣٠ ٤٠ ٥٠

المجموعات

٥٤ ٥٨ ٦٢ ٦٦ ٧٠ ٧٤

«المنحنى التكرارى المتجمع النازل»

• ومن الرسم نجد أن :

١ عدد العمال الذين مرتباتهم ٦٠ جنيهًا فأكثر = ٤٠ عاملاً.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم ٦٠ جنيهًا فأكثر = $\frac{٤٠}{٥٠}$ × ١٠٠٪

= ٨٠ ٪

حاول بنفسك

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ طالبًا فى امتحان مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٤	٨	١٢	١٠	٦	٤٠

ارسم : ١ المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد. ٢ المنحنى التكرارى المتجمع النازل.



على الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل وتمثيلهما بيانيًا

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات أسئلة كتاب الوزارة

أولًا مسائل على المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

١ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :

المجموعات	٢ـ	٦ـ	١٠ـ	١٤ـ	١٨ـ	٢٢ـ	٢٦ـ	المجموع
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

والمطلوب : رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع.

---

٢ الجدول التكرارى التالى يمثل درجات ٦٠ طالبًا فى مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠ـ	٢٠ـ	٣٠ـ	٤٠ـ	٥٠ـ	المجموع
التكرار	٩	١١	١٣	١٧	١٠	٦٠

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع وإذا كانت درجة النجاح هى ٣٠ فما هو عدد الطلبة الراسبين ؟ «٢٠ طالبًا»

ثانيًا مسائل على المنحنى التكرارى المتجمع النازل

٣ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجر اليومى لمجموعة من العمال :

المجموعات	٥ـ	١٠ـ	١٥ـ	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ	المجموع
التكرار	١٠	١٤	٢٤	٣٠	١٢	١٠	١٠٠

والمطلوب : رسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.

٤ **فصل دراسى به ٥٠ تلميذًا والجدول التالى يبين توزيع عدد ساعات المذاكرة بينهم يوميًا :**

المجموعات	١ـ	٢ـ	٣ـ	٤ـ	٥ـ	٦ـ	٧ـ	المجموع
التكرار	٢	٣	٥	١٢	١٥	٧	٦	٥٠

[١] ارسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.

[٢] من الرسم أوجد عدد التلاميذ الذين يذاكرون ٦ ساعات فأكثر يوميًا. «١٣ تلميذًا»

[٣] أوجد النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يذاكرون ٦ ساعات فأكثر يوميًا. «٢٦٪»

ثالثًا مسائل على المنحنيين معًا

٥ **ارسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط للتوزيع التكرارى التالى :**

المجموعات	٨ـ	١٢ـ	١٦ـ	٢٠ـ	٢٤ـ	٢٨ـ	٣٢ـ	٣٦ـ	٤٠ـ	المجموع
التكرار	٤	٧	١٢	١٨	٢٠	١٩	١١	٦	٣	١٠٠

٦ **فيما يلى التوزيع التكرارى الذى يبين درجات ١٠٠٠ طالب فى إحدى المواد :**

النسبة المئوية	٢٠ـ	٣٠ـ	٤٠ـ	٥٠ـ	٦٠ـ	٧٠ـ	٨٠ـ	٩٠ـ	المجموع
عدد الطلبة	٣٠	٧٠	١٦٠	٢٦٠	١٥٠	١٣٠	١١٠	٩٠	١٠٠٠

والمطلوب : [١] رسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع.

[٢] إيجاد عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٧٥٪ «٧٤٠ طالبًا»

[٣] إيجاد عدد الطلبة الحاصلين على ٨٥٪ فأكثر. «١٤٠ طالبًا»



الدرس 3

الوســط الحسابى



تذكر أن

لحساب الوسط الحسابى لمجموعة من القيم نقوم بما يلى :

١ نوجد مجموع هذه القيم.   ٢ نقسم الناتج على عدد هذه القيم.

أى أن : الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$

فمثلاً : إذا كانت درجات ٥ تلاميذ هى : ٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٤

فإن : الوسط الحسابى لدرجاتهم = $\frac{٢٥ + ٢٣ + ٢١ + ٢٢ + ٢٤}{٥}$ = ٢٣ درجة

إيجاد الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

المثال التالى يوضح كيفية إيجاد الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات :

مثال

الجدول التالى يبين توزيع درجات ٥٠ تلميذًا فى مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٨	١٢	١٤	٩	٧	٥٠

أوجد الوسط الحسابى لدرجات التلاميذ.

الحـــل

١ نحدد مراكز المجموعات تبعًا للقانون :

مركز المجموعة = $\frac{\text{حدها الأدنى + حدها الأعلى}}{٢}$

فيكون مركز المجموعة الأولى = $\frac{١٠ + ٢٠}{٢}$ = ١٥

، مركز المجموعة الثانية = $\frac{٢٠ + ٣٠}{٢}$ = ٢٥ ... وهكذا

ونظرًا لأن أطوال المجموعات الجزئية متساوية وكل منها = ١٠

نعتبر الحد الأعلى للمجموعة الأخيرة = ٦٠ فيكون مركزها = $\frac{٥٠ + ٦٠}{٢}$ = ٥٥

٢ نكون الجدول الرأسى الآتى :

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	مركز المجموعة × التكرار (م × ك)
١٠–	١٥	٨	١٢٠
٢٠–	٢٥	١٢	٣٠٠
٣٠–	٣٥	١٤	٤٩٠
٤٠–	٤٥	٩	٤٠٥
٥٠–	٥٥	٧	٣٨٥
المجموع		٥٠	١٧٠٠

٣ الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع (م × ك)}}{\text{مجموع ك}}$ = $\frac{١٧٠٠}{٥٠}$ = ٣٤ درجة.

حاول بنفسك

الجدول التالى يبين الأجر اليومى بالجنيهات لعدد ٥٠ عاملاً فى أحد المصانع :

المجموعات	٥–	١٥–	٢٥–	٣٥–	٤٥–	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

أوجد الوسط الحسابى لأجر العامل بالجنيهات.

تماريـن 16 على الوسط الحسابى



اختبـــار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

[١] الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{..........}{..........}$

[٢] مركز المجموعة = $\frac{.......... + ...}{٢}$

[٣] الوسط الحسابى للقيم : ٥ ، ١٢ ، ١٧ ، ٦ هو ....

[٤] إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٨ والحد الأعلى لنفس المجموعة ١٤ فإن مركزها = ...

[٥] إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٤ ومركزها ٩ فإن حدها الأعلى = ...

[٦] إذا كان الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى هو ٣٩,٤ ومجموع تكراراته ١٠٠ فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة فى مركزها = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الوسط الحسابى لمجموعة القيم : ٢ − أ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، ٣ ، ٣ + أ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ١٥

[٢] إذا كان الوسط الحسابى لدرجات خمسة طلاب هو ٢٠ درجة فإن مجموع درجاتهم = ... درجة.

(أ) ٤ (ب) ١٥ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

[٣] مركز المجموعة الأولى من المجموعات : ٧− ، ١٣− ، ١٩− ، ٢٥− هو ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٣

[٤] إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما ١٤ ومركزها هو ١٠ فإن الحد الأدنى لها هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

[٥] إذا كانت بداية مجموعة هى ٥ ومركزها هو ٧,٥ فإن طول المجموعة هو ....

(أ) ٥ (ب) ٧,٥ (جـ) ١٠ (د) ١٢,٥

٣ أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

«٢١»

٤ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ١٠ طلاب فى امتحان مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	١	٢	٤	٢	١	١٠

[١] احسب الوسط الحسابى لدرجات الطلاب.

[٢] إذا كانت درجة النجاح هى ٣٠ فاحسب عدد الطلاب الراسبين. «٣٥ درجة ، ٣ طلاب»

٥ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجور الإضافية لعدد ٣٠ عاملاً :

المجموعات	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	المجموع
التكرار	٢	٣	٥	٨	٦	٤	٢	٣٠

أوجد الوسط الحسابى لهذه الأجور. «٥١»

٦ الجدول الآتى يبين توزيع ١٢٠ طالبًا حسب أطوالهم بالسنتيمترات :

الطول بالسنتيمتر	١٤٠-	١٤٤-	١٤٨-	١٥٢-	١٥٦-	١٦٠-	المجموع
التكرار	١٢	٢٠	٣٨	٢٢	١٧	١١	١٢٠

أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع. «١٥١,٥ سم»

٧ الجدول الآتى يبين درجات ٤٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :

المجموعات	٥-	١٥-	....	٣٥-	٤٥-	المجموع
عدد الطلاب	٣	....	١٢	١٠	٥	٤٠

[١] أكمل الجدول. [٢] احسب الوسط الحسابى.

[٣] أوجد عدد الطلاب الذين لا تقل درجاتهم عن ٣٥ «٣١ درجة ، ١٥ طالبًا»

٨ **فيما يلى التوزيع التكرارى لأوزان ٣٠ طفلاً بالكيلو جرامات :**

الوزن بالكيلو جرام	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	المجموع
التكرار	٢	٣	....	٨	٦	٤	٢	٣٠

أكمل الجدول ثم أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع. «٢٠,٤ كجم»

٩ **الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٥٠ تلميذًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس :**

الوزن بالكيلو جرام	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
عدد التلاميذ	٧	٣ ك	٤ ك	١٠	٨	٤	٥٠

[١] احسب قيمة ك [٢] أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع. «٣ ، ٤٤ كجم»

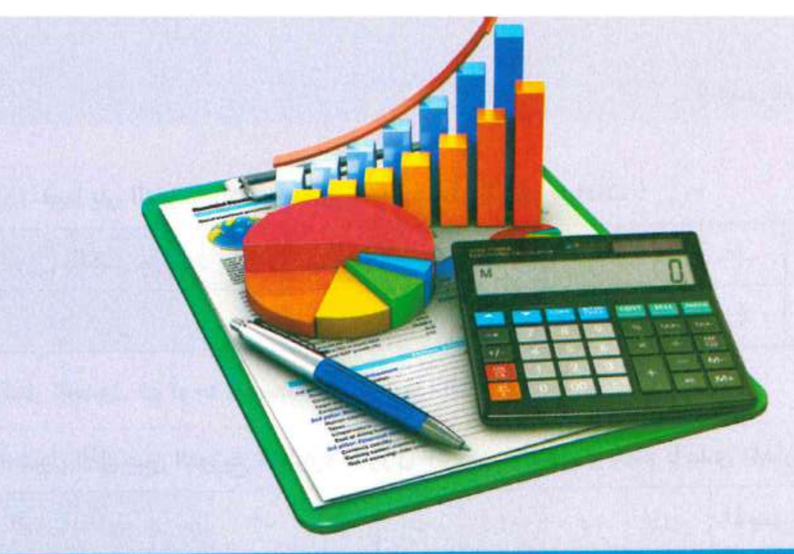
١٠ **الجدول التكرارى الآتى يبين التوزيع التكرارى لعدد أيام الإجازات بأحد المصانع لعدد ٥٠ عاملًا :**

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-
التكرار	٤	٥	٨	ك - ٢	٧	٥	١

أوجد : [١] قيمة ك [٢] الوسط الحسابى لهذا التوزيع. «٢٢ ، ١٥,٢ يومًا»

١١ إذا كان الوسط الحسابى لدرجات تلميذ فى الخمسة أشهر الأولى هى ٢٣,٨ فما الدرجة التى يجب أن يحصل عليها فى الشهر السادس ليكون الوسط الحسابى لدرجاته ٢٤ درجة ؟ «٢٥ درجة»

١٢ إذا كان الوسط الحسابى لدرجات مجدى خلال ٤ اختبارات هو ١٦ درجة فما هى الدرجة التى يجب على مجدى الحصول عليها فى الاختبار الخامس ليكون متوسطه عن الاختبارات كلها ١٨ درجة ؟ «٢٦ درجة»



الدرس 4 الـوسـيط



تذكر أن

الوسيط لمجموعة من القيم : هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساويًا لعدد القيم الأكبر منها.

ولإيجاد الوسيط نتبع الآتى :



إذا كان عدد القيم فرديًا

فإن :

الوسيط هو : القيمة التى تقع فى الوسط تمامًا

فمثلًا : • إذا كانت القيم هى :

٢٠ ، ٣٠ ، ١٧ ، ٢٣ ، ٤٢

• فإننا نرتبها تصاعديًا كالتالى :

٤٢ ، ٣٠ ، ٢٣ ، ٢٠ ، ١٧

و يكون : الوسيط = ٢٣

إذا كان عدد القيم زوجيًا

فإن :

الوسيط = $\frac{\text{مجموع القيمتين اللتين تقعان فى الوسط}}{٢}$

فمثلًا : • إذا كانت القيم هى :

٢١ ، ١٣ ، ٢٤ ، ٢٣ ، ١٣ ، ٢٧

• فإننا نرتبها تصاعديًا كالتالى :

٢٧ ، ٢٤ ، ٢٣ ، ٢١ ، ١٣ ، ١٣

و يكون : الوسيط = $\frac{٢١+٢٣}{٢}$ = ٢٢

إيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات بيانيًا

لإيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات بيانيًا نتبع الخطوات الآتية :

1 نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل ، ثم نرسم المنحنى التكرارى المتجمع له.

2 نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$

3 نعين النقطة التى تمثل ترتيب الوسيط على المحور الرأسى ونرسم منها مستقيمًا أفقيًا يقطع المنحنى فى نقطة ونسقط من هذه النقطة عمودًا على المحور الأفقى يقطعه فى نقطة تمثل قيمة الوسيط والمثال التالى يوضح كيفية إيجاد الوسيط باستخدام المنحنيين.

مثال

فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبًا فى امتحان مادة الرياضيات :

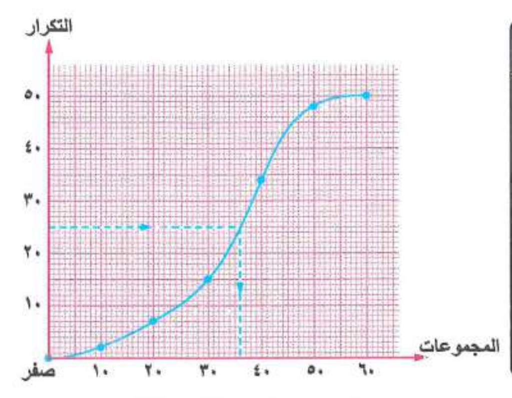
مجموعات الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
عدد الطلاب	٢	٥	٨	١٩	١٤	٢	٥٠

أوجد الدرجة الوسيطة للطلاب.

الحل

أولًا : إيجاد الدرجة الوسيطة باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد :

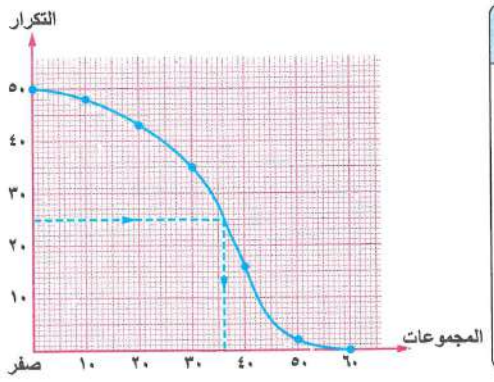
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٠	صفر
أقل من ١٠	٢
أقل من ٢٠	٧
أقل من ٣٠	١٥
أقل من ٤٠	٣٤
أقل من ٥٠	٤٨
أقل من ٦٠	٥٠



∵ ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥ ∴ من الشكل : الوسيط = ٣٦ تقريبًا

ثانيًا : إيجاد الدرجة الوسيطة باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع النازل :

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
٠ فأكثر	٥٠
١٠ فأكثر	٤٨
٢٠ فأكثر	٤٣
٣٠ فأكثر	٣٥
٤٠ فأكثر	١٦
٥٠ فأكثر	٢
٦٠ فأكثر	صفر



∵ ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥ ∴ من الشكل : الوسيط = ٣٦ تقريبًا

ملاحظـة

يمكن إيجاد الوسيط بطريقة أكثر دقة عن طريق رسم كل من المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والنازل فى شكل واحد فيتقاطعان فى نقطة ، ومن هذه النقطة نرسم مستقيمًا رأسيًا يلاقى المحور الأفقى فى نقطة تمثل الوسيط كما بالشكل المقابل فنجد أن : الوسيط = ٣٦ تقريبًا.

حاول بنفسك

باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	المجموع
التكرار	٢	٤	٨	٦	٤	٢٤



اختبـار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الوسيط لمجموعة القيم : ٩ ، ٤ ، ٨ ، ١ ، ٣ هو ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٨

[٢] الوسيط لمجموعة القيم : ٣ ، ٧ ، ٢ ، ٩ ، ٥ ، ١١ هو ....

(أ) ١٢ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٥

[٣] ترتيب الوسيط لمجموعة القيم : ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٨ ، ٤ هو ....

(أ) الثالث. (ب) الرابع. (جـ) الخامس. (د) السادس.

[٤] إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

[٥] إذا كان الوسيط لمجموعة القيم : ك + ١ ، ك + ٢ ، ك + ٥ ، ك + ٤ ، ك + ٣

حيث ك عدد صحيح موجب هو ١٣ فإن : ك = ...

(أ) −١٠ (ب) ١٠ (جـ) ١٣ (د) ١٦

[٦] نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل تعين .... على محور المجموعات.

(أ) الوسط الحسابى (ب) طول المجموعة

(جـ) مركز المجموعة (د) الوسيط

[٧] إذا كانت نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل هى (٣٠ ، ٥٠) فإن مجموع التكرارات = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٠٠

---

٢ باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	−٠	−٢	−٤	−٦	المجموع
التكرار	١	٢	٢	٥	١٠

«٦»

٣ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لمجموعة مكونة من ٤٠ شخصًا حسب النسبة المئوية لدرجة الذكاء لكل منهم :

مجموعات النسب المئوية للذكاء	٤٠–	٥٠–	٦٠–	٧٠–	٨٠–	٩٠–	المجموع
عدد الأشخاص	١	٣	٨	١٤	١٠	٤	٤٠

احسب من منحنى التكرار المتجمع الصاعد نسبة الذكاء الوسيطة لأفراد هذه المجموعة. «٧٥٪ تقريبًا»

---

٤ فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد ١٠٠ مصنع حسب عدد ساعات العمل الأسبوعية :

المجموعات (بالساعة)	٥٠–	٦٠–	٧٠–	٨٠–	٩٠–	١٠٠–	المجموع
عدد المصانع	٥	٨	١٢	٢٨	٣٣	١٤	١٠٠

أوجد باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل العدد الوسيط لساعات العمل لهذه المصانع.

«٨٩,٥ ساعة تقريبًا»

---

٥ 📖 فيما يلى توزيع الأجور بالجنيه لبعض العاملين فى أحد المصانع :

مجموعات الأجور	٣٠٠–	٤٠٠–	٥٠٠–	٦٠٠–	٧٠٠–	المجموع
عدد العمال	٨	١٢	١٨	٧	٥	٥٠

ارسم منحنى التكرار المتجمع النازل لهذا التوزيع ثم أوجد الأجر الوسيط. «٥٢٠ جنيهًا تقريبًا»

---

٦ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٦٠ طالبًا فى اختبار للرياضيات :

مجموعات الدرجات	٥–	١٠–	١٥–	٢٠–	٢٥–	٣٠–	٣٥–	المجموع
عدد الطلاب	٢	٥	١٤	٢٠	١٣	٥	١	٦٠

أوجد الدرجة الوسيطة. «٢٢ درجة تقريبًا»

٧ الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٢٠ طفلًا بالكيلو جرام :

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

أوجد الوزن الوسيط بالكيلو جرام باستخدام المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع.

«٢٩ كجم تقريبًا»

٨ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	المجموع
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

أوجد : [١] الوسط الحسابى لدرجة الطالب. [٢] الوسيط.

«١٦,٨ ، ١٧,٦ تقريبًا»

٩ من الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى :

المجموعات	١٠-	٢٠-	س -	٤٠-	٥٠-	٦٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك + ٢	٤	١٠٠

[١] أوجد قيمة كل من س ، ك

«س = ٣٠ ، ك = ١٥»

[٢] ارسم فى شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل ، ثم احسب الوسيط.

«٤١ تقريبًا»



الدرس 5 المنـــوال



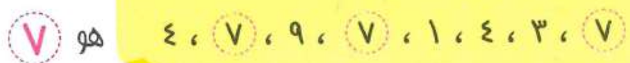

تذكر أن

المنوال لمجموعة من القيم : هــو القيمة الأكثر شـيوعًا فى هـذه المجموعة أو هو القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها.

فمثلاً :



المنوال لمجموعة القيم :



٧ ، ٣ ، ٤ ، ١ ، ٧ ، ٩ ، ٧ ، ٤ هو ٧

إيجاد المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

فيما يلى مثال يوضح كيفية إيجاد المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات.

مثال

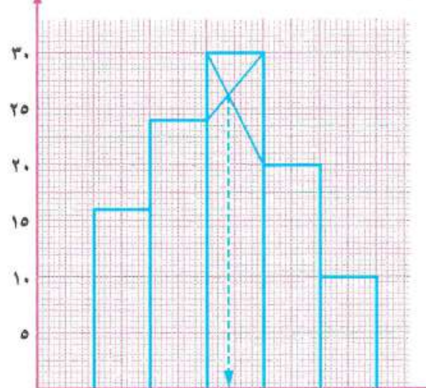
فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجات ١٠٠ تلميذ فى أحد الاختبارات :

مجموعات الدرجات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
عدد التلاميذ	١٦	٢٤	٣٠	٢٠	١٠	١٠٠

أوجد الدرجة المنوالية لهؤلاء التلاميذ.

الحـــل

يمكن إيجاد المنوال لهذا التوزيع بيانيًا باستخدام المدرج التكرارى وذلك كالآتى :



١ نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقيًا والآخر رأسيًا لتمثيل تكرار كل مجموعة.

٢ نقسم المحور الأفقى إلى عدد من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب لتمثيل المجموعات.

٣ نقسم المحور الرأسى إلى عدد من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب بحيث يمكن تمثيل أكبر تكرار فى المجموعات.

٤ نرسم مستطيلًا قاعدته هى المجموعة (١٠–) وارتفاعه يساوى التكرار (١٦)

٥ نرسم مستطيلًا ثانيًا ملاصقًا للمستطيل الأول قاعدته هى المجموعة (٢٠–) وارتفاعه يساوى التكرار (٢٤)

٦ نكرر رسم باقى المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (٥٠–)

٧ نحدد المجموعة الأكثر تكرارًا ثم نرسم خطين كالموضحين فى الشكل فيتقاطعان فى نقطة ومنها نرسم مستقيمًا رأسيًا يقطع المحور الأفقى فى نقطة هى القيمة المنوالية.

أى أن القيمة المنوالية ≈ ٣٤

حاول بنفسك

أوجد المنوال من التوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٢–	٤–	٦–	٨–	١٠–	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠



على المنـــــوال



● تذكر ● فهـم ● تطبيق ● حل مشكلات ■ أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المنوال لمجموعة من القيم هو ....

(أ) $\frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$ (ب) القيمة الأكثر شيوعًا.

(جـ) القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا.

(د) نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل.

[٢] المنوال للقيم : ٥ ، ٣ ، ٨ ، ٥ ، ٩ هو ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ٩

[٣] المنوال للقيم : ٨ ، ٧ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٨ هو ....

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٥

[٤] إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، أ ، ٥ ، ٣ هو ٣ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٦

[٥] إذا كان المنوال للقيم : ١٢ ، ٧ ، س + ١ ، ٧ ، ١٢ هو ٧ فإن : س = ...

(أ) ١٢ (ب) ١١ (جـ) ٧ (د) ٦

[٦] إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢ س هو ٤ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

[٧] إذا كان المنوال للقيم : ٥ ، ٣ ، $\sqrt{\text{س} - ١}$ ، ٤ س هو ٣ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

٢ مصنع به ٦٠٠ عامل أخذت منه عينة مكونة من ١٢٠ عاملًا وتمثل المجتمع تمثيلًا جيدًا فوجد أن توزيع أعمارهم بالسنين كما فى الجدول الآتى :

مجموعات العمر	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	المجموع
عدد العمال	١٢	١٧	١٨	٤٠	٢٥	٨	١٢٠

ارسم المدرج التكرارى واستنتج منه العمر المنوالى. «٤٣ سنة»

٣ **الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ١٠٠ تلميذ فى أحد الاختبارات :**

مجموعات الدرجات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-	المجموع
عدد التلاميذ	٢	١٠	١٥	٤٠	٢٥	٦	٢	١٠٠

أوجد الدرجة المنوالية باستخدام المدرج التكرارى لهذا التوزيع. «٢٤,٥ درجة»

٤ **أوجد المنوال للتوزيع التكرارى التالى لدرجات ٤٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :**

مجموعات الدرجات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	المجموع
التكرار	٣	٤	١٢	٨	٧	٦	٤٠

«٥٧ درجة»

٥ **الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٥٠ تلميذًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس :**

الوزن بالكجم	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
عدد التلاميذ	ك + ٤	٣ ك	٤ ك	٣ ك + ١	٣ ك - ١	ك + ١	٥٠

[١] أوجد قيمة ك [٢] ارسم المدرج التكرارى وأوجد الوزن المنوالى. «٣ ، ٤٣ كجم»

٦ **الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى ذى المجموعات متساوية المدى للأجور الأسبوعية لعدد ١٠٠ عامل بأحد المصانع :**

مجموعات الأجر بالجنيه	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-	س -	١٢٠-	١٣٠-
عدد العمال	١٠	١٣	ك - ٤	٢٠	١٦	١٤	١١

أوجد : [١] قيمة كل من س ، ك [٢] الأجر المنوالى بالجنيه. «١١٠ ، ٢٠ ، ١٠٥ جنيهات»

٧ **الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٥٠ تلميذًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس :**

الوزن بالكجم	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
عدد التلاميذ	٧	٣ ك	٤ ك	١٠	٨	٤	٥٠

[١] أوجد قيمة ك «٣» [٢] احسب الوسط الحسابى. «٤٤ كجم»

[٣] ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

[٤] ارسم المدرج التكرارى وأوجد الوزن المنوالى. «٤٣ كجم»

[٥] أوجد الوسيط. «٤٣,٥ كجم»



مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

١ أكمل ما يأتى :

١ سلحفاة تقطع ٨٠ مترًا فى الساعة فإنها تقطع ٨ أمتار فى .... دقائق.

٢ مجموع الأعداد الحقيقية فى الفترة [-١٢ ، ١٢] يساوى ....

٣ إذا كان : ◯ + ▢ = ٢٠ ، ◯ + ◯ + ▢ = ٣٥

فإن : ◯ = ...

٤ فى ثلاث مباريات لقذف كرة البولينج حصلت سارة على ١٣٩ ، ١٤٣ ، ١٤٤ نقطة فإن عدد النقط التى تحتاجها سارة فى المباراة الرابعة ليكون متوسط النقاط فى المباراة ١٤٥ نقطة يساوى ....

٥ صندوقا تفاح بهما ٥٤ كجم من التفاح ، الأول به ١٢ كجم زيادة عن الثانى فإن عدد الكيلو جرامات من التفاح فى الصندوق الثانى يساوى .... كجم.

٦ ٣٠٠ ÷ ٢٠٠ = ١ ÷ ....

٧ (٣٠١ + ٣٠٢ + ٣٠٣ + ... + ٣٢٥) - (١ + ٢ + ٣ + ... + ٢٥) = ...

٨ إذا كان أربعة أمثال عدد هو ٤٨ فإن : $\frac{١}{٣}$ هذا العدد = ...

٩ جمال عنده ٣ أخوات ، ٥ أخوة. أخته سارة عندها س أخت ، ص أخ

فإن : س ص = ...

١٠ إذا كان : أ + ب + جـ = ٢٦ ، أ + ب = ١٥ ، ب + جـ = ٢٠

فإن : ب = ...

١١ يمكن لثلاث فتيات إنجاز عمل ما فى ٣٦ ساعة ، فإن عدد الساعات اللازمة لأربع فتيات لإنجاز نفس العمل يساوى ....

١٢ إذا كان :

	○	□	□
	△	□	□
+	□	△	□
	٦	١	٢٠

فإن : □ = ... ، △ = ... ، ○ = ...

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ العدد ٣,٠١٥ يقع على خط الأعداد بين ....

(أ) $\frac{٥}{٢}$ ، ٣ (ب) $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{١١}{٣}$

(جـ) ٣ ، $\frac{١٦}{٥}$ (د) ٣,١٢ ، ٣,١٥

٢ أى من الأعداد الآتية يقع بين ٠,٠٧ ، ٠,٠٨ ؟

(أ) ٠,٠٠٠٧٥ (ب) ٠,٠٠٧٥ (جـ) ٠,٠٧٥ (د) −٠,٧٥

٣ أى مما يأتى مختلف فى القيمة ؟

(أ) ١ ÷ ٩ + ٩ − ١ (ب) ١ + ٩ ÷ ٩ − ١

(جـ) ١ − ٩ + ٩ × ١ (د) ١ × ٩ − ٩ + ١

٤ إذا كانت : س تمثل عددًا سالبًا فأى من الآتى يمثل عددًا موجبًا ؟

(أ) $س^٢$ (ب) $س^٣$ (جـ) ٢ س (د) $\frac{س}{٢}$

٥ أكبر الأعداد الآتية هو ....

(أ) –٢٥,١ (ب) –٠,١٢٥ (جـ) –٠,٠١٢٥ (د) –٠,٠٠١٢٥

٦ أفضل تقدير للعدد المقابل للنقطة س هو ....

(أ) ١,١ (ب) ١,٢ (جـ) ١,٥ (د) ١,٧

٧ إذا كان : ١٠٪ من س يساوى ص فإن : س = ...

(أ) ٠,١ ص (ب) ص (جـ) ٩ ص (د) ١٠ ص

٨ إذا كان : س = $(-٢)^{٤}$ ، ص = $-٢^{٤}$ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س > ص (جـ) س < ص (د) س ≤ ص

٩ $\sqrt{\sqrt[٣]{٨١ \times ٨١ \times ٨١ \times ٨١}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

١٠ لأى عدد ك فإن : ك + ك + (ك × ك × ك) يمكن كتابتها على الصورة ....

(أ) ٢ $ك^{٢}$ + ٣ ك (ب) ٥ ك (جـ) $ك^{٥}$ (د) ٢ ك + $ك^{٣}$

١١ ماكينة تنتج نوعين من القضبان أحدهما لونه أسود وطوله (١٠ ± ٠,٥) سم والآخر أبيض وطوله (٦ ± ٠,٥) سم ، إذا وضع قضيبان كما هو مبين فى الشكل المقابل فإن أصغر فرق ممكن بين طوليهما يكون ....

(أ) ٤ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٣ سم (د) ٨,٥ سم

١٢ جميع الأعداد التى تقبل القسمة على ٤ ، ١٥ تقبل أيضًا القسمة على ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٢٤ (د) ٤٥

ثانيًا

الهندســة



الملاحظات الموجودة فى هامش بعض الصفحات **فى الهندسة** ، والمشار إليها بالعلامة (*) هي نظريات ونتائج تم دراستها سابقًا



الوحدة الرابعة

متوسطات المثلث - المثلث المتساوى الساقيـــن

الدرس الأول : متوسطات المثلث.

الدرس الثانى : تابع متوسطات المثلث.

الدرس الثالث : المثلث المتساوى الساقين - نظرية المثلث المتساوى الساقين.

الدرس الرابع : عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين.

الدرس الخامس : نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين.

يمكنك
حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

SCAN

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف متوسط المثلث.
- يتعرف نقطة تقاطع متوسطات المثلث والنسبة التى تقسم بها كل متوسط.
- يستنتج العلاقة بين طول المتوسط الخارج من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية وطول الوتر.
- يتعرف المثلث الثلاثينى ستينى.
- يستنتج خواص المثلث المتساوى الساقين.
- يتعرف خواص المثلث المتساوى الأضلاع.
- يتعرف محور تماثل القطعة المستقيمة.
- يتعرف محور تماثل المثلث المتساوى الساقين.
- يحل مسائل متنوعة على المثلث المتساوى الأضلاع والمثلث المتساوى الساقين.
- يقدّر دور الهندسة فى حل المشكلات الحياتية.



الدرس 1 متوسطات المثلث

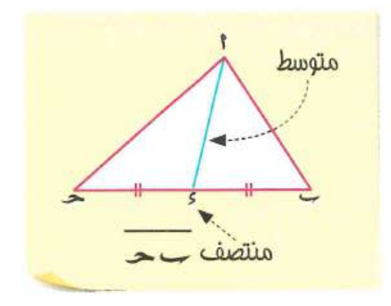
تعريف

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أى رأس من رءوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ء منتصف $\overline{\text{بحـ}}$

فإن : $\overline{\text{أء}}$ متوسط فى $\triangle$ أبحـ



* لاحظ أن : أى مثلث له ثلاثة متوسطات.

نظرية 1

متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى نقطة واحدة.

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

نقطة تقاطع المتوسطات

$\overline{\text{أء}}$ ، $\overline{\text{بو}}$ ، $\overline{\text{حـهـ}}$ هى المتوسطات الثلاثة للمثلث أبحـ

، وتتقاطع جميعها فى نقطة م ($\overline{\text{أء}} \cap \overline{\text{بو}} \cap \overline{\text{حـهـ}} = \{\text{م}\}$)

مثال ١

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه :

أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٨ سم

، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب

حيث $\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{ب هـ}}$ = {م} ، رُسم $\overrightarrow{\text{حـ م}}$ ليقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى و **أوجد :** محيط Δ أ و هـ

الحــل

المعطيات | ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٨ سم

، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

المطلوب | **إيجاد :** محيط Δ أ و هـ

البرهان | فى Δ أ ب حـ : ∵ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∴ (أ ب)٢ = (أ حـ)٢ − (ب حـ)٢ = ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦(*) ∴ أ ب = ٦ سم

، ∵ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{ب هـ}}$ = {م} ∴ م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

، ∵ م ∈ $\overline{\text{حـ و}}$ ∴ $\overline{\text{حـ و}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

∴ و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ و = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٣ سم

، ∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ∴ أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٥ سم

، فى Δ أ ب حـ : ∵ و ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب

∴ و هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ = ٤ سم(**)

∴ محيط Δ أ و هـ = أ و + و هـ + أ هـ = ٣ + ٤ + ٥ = ١٢ سم (وهو المطلوب)

(*) تذكر نظرية فيثاغورس : فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة.

(**) تذكر : طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث.

نظرية ٢

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة.

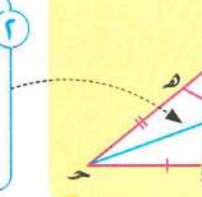
فمثلًا :

فى الشكل التالى : إذا كان أ ب حـ مثلث ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإن :

① م ء = $\frac{١}{٢}$ أ م

فإذا كان : أ م = ٦ سم

فإن : م ء = ٣ سم



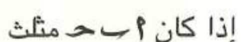
② م حـ = ٢ و م

فإذا كان : و م = ٤ سم

فإن : م حـ = ٨ سم

ملاحظات

* **نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.**
* **فى الشكل المقابل :**



إذا كان أ ب حـ مثلث



، م نقطة تلاقى متوسطاته $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}}$

فإن : م ء = $\frac{١}{٣}$ أ ء ، أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ ء



فمثلًا :

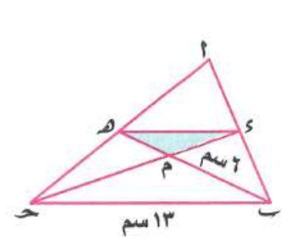
إذا كان : أ ء = ٩ سم فإن : م ء = $\frac{١}{٣}$ أ ء = ٣ سم ، أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ ء = ٦ سم

وبالمثل : م و = $\frac{١}{٣}$ ب و ، ب م = $\frac{٢}{٣}$ ب و

، م هـ = $\frac{١}{٣}$ حـ هـ ، حـ م = $\frac{٢}{٣}$ حـ هـ

مثال ٢

فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه :

$\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسطان تقاطعا فى نقطة م

، ب م = ٦ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، ء حـ = ١٢ سم

أوجد : محيط Δ ء م هـ

الحــل

المعطيات | ا ب حـ مثلث فيه : $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ب هـ}$ متوسطان ، م نقطة تقاطعهما
، ب م = ٦ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، ء حـ = ١٢ سم

المطلـوب | إيجاد : محيط △ ء م هـ

البرهــان | ∵ $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ب هـ}$ متوسطان تقاطعا فى نقطة م

∴ م نقطة تقاطع متوسطات △ ا ب حـ

∴ م هـ = $\frac{1}{2}$ ب م = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

، ء م = $\frac{1}{3}$ ء حـ = $\frac{1}{3}$ × ١٢ = ٤ سم

، ∵ $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ب هـ}$ متوسطان فى △ ا ب حـ

∴ ء منتصف $\overline{ا ب}$ ، هـ منتصف $\overline{ا حـ}$

∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ١٣ = ٦,٥ سم (*)

∴ محيط △ ء م هـ = م هـ + ء م + ء هـ = ٣ + ٤ + ٦,٥ = ١٣,٥ سم (وهو المطلوب)

حقيقـة

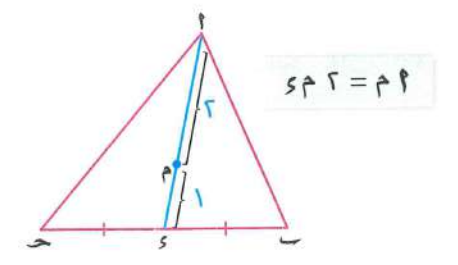
النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هى نقطة تقاطع متوسطات هذا المثلث.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{ا ء}$ متوسط فى △ ا ب حـ

، م ∈ $\overline{ا ء}$ وكان : ا م = ٢ م ء

فإن : م تكون نقطة تقاطع متوسطات △ ا ب حـ



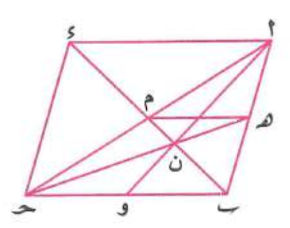
مثـال ٣

فى الشكل المقابل :

ا ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

فإذا كانت ن ∈ $\overline{ب م}$ بحيث ب ن = ٢ ن م

، $\overleftrightarrow{حـ ن}$ ∩ $\overline{ا ب}$ = {هـ} فأثبت أن : هـ م = $\frac{1}{2}$ ب حـ



(*) تذكر: طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث.

الحـــل

المعطيات	أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، ب ن = ٢ ن م
المطلوب	**إثبات أن :** هـ م = $\frac{1}{2}$ ب حـ
البرهان	∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع. ∴ القطران ينصف كل منهما الآخر.(*)

∴ م منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ $\overline{بم}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ∵ ن ∈ $\overline{بم}$ بحيث ب ن = ٢ ن م

∴ ن نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

، ∵ $\overline{حـ هـ}$ تمر بنقطة ن ∴ $\overline{حـ هـ}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

∴ فى Δ أ ب حـ :

∵ هـ منتصف $\overline{أب}$ ، م منتصف $\overline{أحـ}$

∴ هـ م = $\frac{1}{2}$ ب حـ(**) (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، م نقطة تقاطع متوسطاته

فإذا كان : م ء = ٣ سم ، ب م = ٤ سم ، ب حـ = ٩ سم

فأكمل ما يأتى :

[١] ب و = ... سم

[٢] م حـ = ... سم

[٣] م هـ = ... سم

(*) تذكر : قطرا متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

(**) تذكر : طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث.

تماريـن 1 ؟

على متوسطات المثلث



اختبـــار تفاعلى

● تذكر ● فهـم ● تطبيق ● حل مشكلات ● أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

[١] فى Δ أ ب حـ إذا كانت : ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإن $\overline{أ ء}$ يسمى ....

[٢] عدد متوسطات المثلث هو ....

[٣] متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى ....

[٤] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : .... من جهة القاعدة.

[٥] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : .... من جهة الرأس.

[٦] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٢ : .... من جهة القاعدة.

[٧] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : ٨ من جهة الرأس.

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] عدد متوسطات المثلث المنفرج الزاوية هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

[٢] إذا كان : $\overline{ص ء}$ متوسطًا فى Δ س ص ع ، م نقطة تلاقى المتوسطات

فإن : م ء = ... ص م

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

[٣] إذا كانت : م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ ، $\overline{ب ء}$ متوسط

فإن : ب ء : م ء = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ١ : ٣ (جـ) ٣ : ٢ (د) ٣ : ١

[٤] إذا كان : $\overline{أ ء}$ متوسطًا فى Δ أ ب حـ ، م نقطة تقاطع المتوسطات

فإن : أ ء = ... أ م

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

[٥] إذا كان : $\overline{أ ء}$ متوسطًا فى △ أ ب حـ طوله ٩ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته

فإن : ء م = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤,٥ (جـ) ٦ (د) ٩

[٦] إذا كانت : م نقطة تلاقى المتوسطات فى △ أ ب حـ ، وكان $\overline{أ ء}$ متوسطًا طوله ٦ سم

فإن : أ م = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

[٧] إذا كانت : م نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب حـ ، ء منتصف $\overline{ب حـ}$

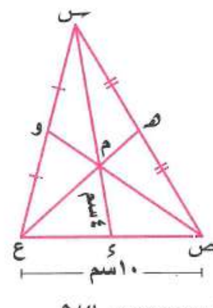
فإن : أ ء = ...

(أ) ٢ أ م (ب) $\frac{٢}{٣}$ م ء (جـ) $\frac{٣}{٢}$ أ م (د) ٤ م ء

---

[٣] باستخدام المعطيات الموجودة على كل شكل أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل :

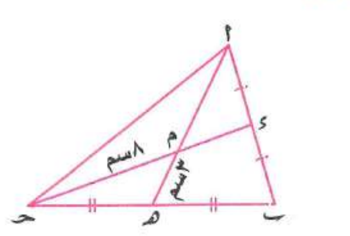
[١]



س م = ... سم

، ص ء = ... سم

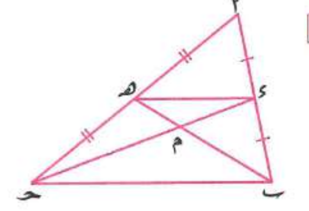
[٢]



م أ = ... سم ، م ء = ... سم

، م هـ = ... أ هـ ، م حـ = ... حـ ء

[٣]



إذا كان : ب حـ = ١٢ سم

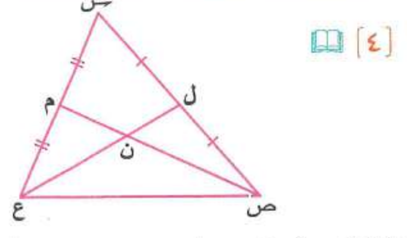
، ب هـ = ٩ سم ، م حـ = ٨ سم

فإن : ء هـ = ... سم

، م هـ = ... سم

، م ء = ... سم

[٤]



إذا كان : ل ع = ١٥ سم ، ص م = ١٨ سم

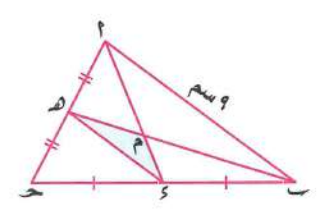
، س ص = ٢٠ سم

فإن : ن ل = ... سم

، ن ص = ... سم

، محيط △ ن ل ص = ... سم

٤ في الشكل المقابل :



$\overline{٩ب}$ حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{ب حـ}$

، هـ منتصف $\overline{٩ حـ}$ ، $\overline{٩ء} \cap \overline{ب هـ} = \{م\}$

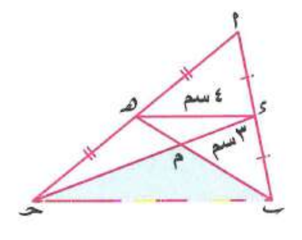
فإذا كان : ٩ء = ٦ سم ، ٩ب = ب هـ = ٩ سم

فاحسب : محيط Δ م ء هـ

«٩,٥ سم»

---

٥ في الشكل المقابل :



إذا كانت : ء ، هـ منتصفي $\overline{٩ب}$ ، $\overline{٩حـ}$ على الترتيب

، $\overline{ب هـ} \cap \overline{ء حـ} = \{م\}$

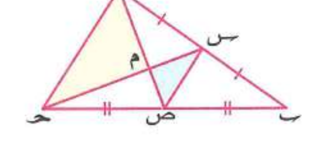
، ء هـ = ٤ سم ، ء م = ٣ سم ، ب هـ = ٦ سم

أوجد : محيط Δ ب م حـ

«١٨ سم»

---

٦ في الشكل المقابل :



٩ب حـ مثلث ، س منتصف $\overline{٩ب}$ ، ص منتصف $\overline{ب حـ}$

، س ص = ٥ سم ، $\overline{س حـ} \cap \overline{٩ص} = \{م\}$

حيث حـ م = ٨ سم ، ص م = ٣ سم

أوجد : [١] محيط Δ م س ص [٢] محيط Δ م ٩ حـ

«١٢ سم ، ٢٤ سم»

---

٧ ٩ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ٨ سم ، و ، هـ منتصفا $\overline{٩ب}$ ، $\overline{٩حـ}$ على الترتيب

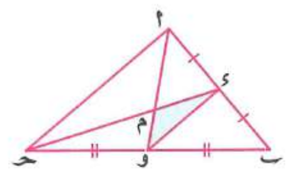
، $\overline{ب هـ} \cap \overline{حـ و} = \{م\}$ ، فإذا كان : ب م = ٤ سم ، حـ م = ٦ سم

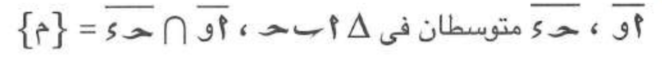
أوجد : محيط Δ م و هـ

«٩ سم»

---

٨ في الشكل المقابل :





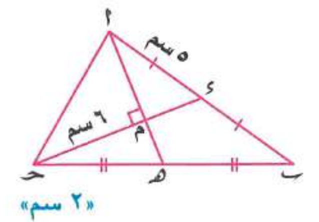
$\overline{٩و}$ ، $\overline{حـ ء}$ متوسطان في Δ ٩ب حـ ، $\overline{٩و} \cap \overline{حـ ء} = \{م\}$

فإذا كان محيط Δ ٩ م حـ = ٣٦ سم

فأوجد : محيط Δ م و ء

«١٨ سم»

٩ **في الشكل المقابل :**



م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب ح

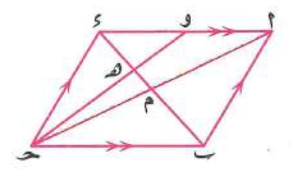
، أم ⊥ ح ء ، م ح = ٦ سم ، أ ء = ٥ سم

أوجد : طول م هـ

«٢ سم»

---

١٠ **في الشكل المقابل :**



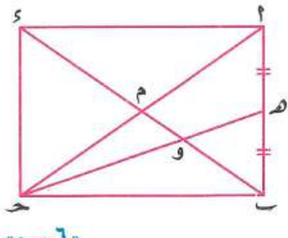
أ ب ح ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

، هـ ∈ ء م حيث ء هـ = ٢ هـ م ، رسم ح هـ فقطع أ ء فى و

أثبت أن : أ و = و ء

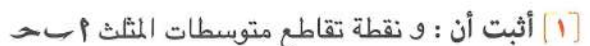
---

١١ **في الشكل المقابل :**



أ ب ح ء مستطيل تقاطع قطراه فى م

، هـ منتصف أ ب ، ح هـ ∩ ب ء = {و}



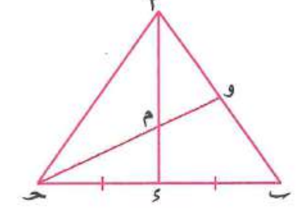
[١] **أثبت أن :** و نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب ح

[٢] إذا كان : ب و = ٤ سم **أوجد :** طول أ م

«٦ سم»

---

١٢ **في الشكل المقابل :**



أ ب ح مثلث فيه : ء منتصف ب ح ، أ ب = أ ح

، م ∈ أ ء بحيث أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ ء ، ح م ∩ أ ب = {و}

أثبت أن : ب و = $\frac{١}{٢}$ أ ح

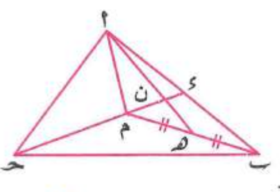
---

١٣ أ ب ح مثلث ، ء منتصف ب ح ، م ∈ أ ء بحيث أ م = ٢ م ء ، رسم ح م فقطع أ ب فى هـ فإذا كان هـ ح = ١٢ سم **أوجد :** طول هـ م

«٤ سم»

---

١٤ **في الشكل المقابل :**



م ∈ ح ء ، م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب ح

، ن ∈ ء م بحيث : ن ء = (س − ١) سم ، م ن = (س + ٣) سم

رسم أ ن فقطع ب م فى هـ منتصف ب م **أوجد :** طول م ح

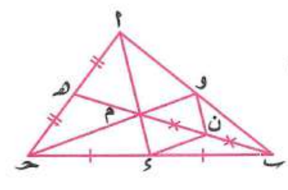
«٢٤ سم»

١٥ أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف ب حـ ، رسمت ء هـ فقطعت أ حـ فى و

أثبت أن : [١] ب و ينصف حـ ء   [٢] حـ و = $\frac{1}{3}$ أ حـ



١٦ فى الشكل المقابل :



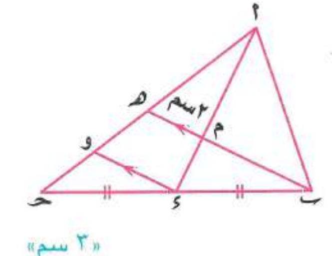
أ ء ، ب هـ متوسطان فى المثلث أ ب حـ متقاطعان فى نقطة م

، حـ م ∩ أ ب = {و} فإذا كانت ن منتصف م ب

فأثبت أن : الشكل و ن ء م متوازى أضلاع.

---

١٧ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف ب حـ ، م ∈ أ ء

بحيث أ م = ٢ م ء ، ب م ∩ أ حـ = {هـ}

، م هـ = ٢ سم فإذا رسم ء و // ب هـ ويقطع أ حـ فى و

فأوجد : طول ء و

« ٣ سم »

---

١٨ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ حـ فإذا كان حـ ء ∩ ب هـ = {م}

، ورُسم أ م فقطع ب حـ فى و

أثبت أن : الشكل ء ب و هـ متوازى أضلاع.



الدرس 2 تابع متوسطات المثلث

نظرية ٣

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث.

المعطيات | أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°
، ب ء متوسط فى المثلث أ ب حـ

المطلوب | **إثبات أن :** ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ

العمل | نرسم ب ء ونأخذ نقطة هـ ∈ ب ء ، بحيث ب ء = ء هـ

البرهان | الشكل أ ب حـ هـ فيه : أ حـ ، ب هـ ينصف كل منهما الآخر.
∴ الشكل أ ب حـ هـ متوازى أضلاع.(*)
، ∵ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°
∴ الشكل أ ب حـ هـ مستطيل.(**) ∴ ب هـ = أ حـ
، ∵ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ

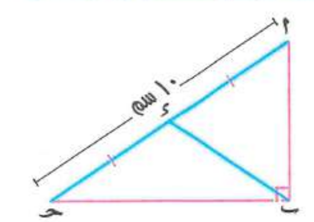


∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ (وهو المطلوب)

أ هـ ء ب حـ

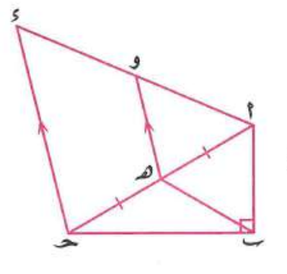
فمثلًا : في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب
، ء منتصف أ حـ وكان أ حـ = ١٠ سم
فإن : ء ب = ٥ سم



(*) تذكر : الشكل الرباعى الذى فيه القطران ينصف كل منهما الآخر يكون متوازى أضلاع.
(**) تذكر : متوازى الأضلاع الذى إحدى زواياه قائمة يكون مستطيلًا.

مثال ١



فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° ، أ جـ = جـ ء

، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، و ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ بحيث $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

أثبت أن : ب هـ = هـ و

الحــل

المعطيات | ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° ، أ جـ = جـ ء ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

المطلوب | **إثبات أن :** ب هـ = هـ و

البرهان | فى Δ أ ب جـ :

∵ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسط ∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

، ∵ أ جـ = جـ ء ∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ جـ ء (١)

فى Δ أ جـ ء : ∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ و منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ (*) ∴ هـ و = $\frac{1}{2}$ جـ ء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب هـ = هـ و (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فى المثلث القائم الزاوية النسبة بين طول الوتر وطول المتوسط الخارج من رأس القائمة تساوى ....

(أ) ١ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٢ : ١ (د) ٢ : ٣

٢ فى Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان : أ جـ = ١٢ سم ، ء منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ٣

(*) تذكر : الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.

٣ Δ أ ب ح قائم الزاوية فى أ ، وطول المتوسط الخارج من أ يساوى ٤ سم

فإن : ب ح = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

٤ Δ س ص ع قائم الزاوية فى ص ، إذا كان : س ص = ٦ سم ، ص ع = ٨ سم ،

هـ منتصف $\overline{\text{س ع}}$ فإن : ص هـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

عكس نظرية ٣

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رءوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.

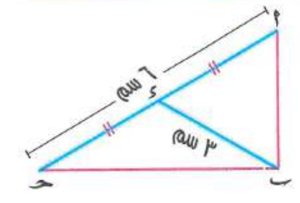
المعطيات	أ ب ح مثلث ، $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط فيه ، ء أ = ء ب = ء ح
المطلوب	**إثبات أن :** ق (∠ أ ب ح) = ٩٠°
العمـــل	نرسم $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ، بحيث ب ء = ء هـ
البرهـــان	∵ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ ح ∴ ب هـ = أ ح
	∴ الشكل أ ب ح هـ فيه : $\overline{\text{أ ح}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متساويان فى الطول وينصف كل منهما الآخر.
	∴ الشكل أ ب ح هـ مستطيل (*) ∴ ق (∠ أ ب ح) = ٩٠° (وهو المطلوب)

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط فى Δ أ ب ح

، ب ء = ٣ سم ، أ ح = ٦ سم

فإن : ق (∠ أ ب ح) = ٩٠° (لأن : ب ء = $\frac{1}{2}$ أ ح)



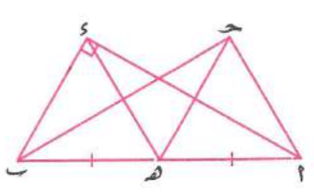
مثال ٢



فى الشكل المقابل :

أ ء ب مثلث قائم الزاوية فى ء ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، ح هـ = ء هـ **أثبت أن :** ق (∠ أ ح ب) = ٩٠°



(*) تذكر : الشكل الرباعى الذى فيه القطرين ينصف كل منهما الآخر يكون متوازى أضلاع وإذا كان القطران متساويان فى الطول كان هذا الشكل مستطيلًا.

الحــل

المعطيات | هـ منتصف $\overline{أب}$ ، ق (∠ ا ء ب) = ٩٠° ، حـ هـ = ء هـ

المطلوب | إثبات أن : ق (∠ ا حـ ب) = ٩٠°

البرهــان | فى △ ا ء ب : ∵ ق (∠ ا ء ب) = ٩٠° ، $\overline{ءهـ}$ متوسط ∴ ء هـ = ½ ا ب

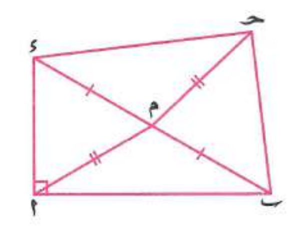
ولكن حـ هـ = ء هـ ∴ حـ هـ = ½ ا ب

∴ فى △ ا حـ ب : $\overline{حـهـ}$ متوسط طوله يساوى نصف طول $\overline{اب}$

∴ ق (∠ ا حـ ب) = ٩٠° (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢

فى الشكل المقابل :



ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ب ا ء) = ٩٠°

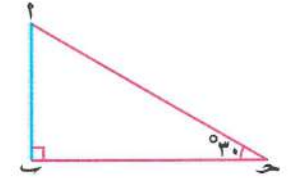
، م منتصف $\overline{بء}$ ، حـ م = ا م

أثبت أن : ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠°

نتيجــة

طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر.

أى أنه فى الشكل المقابل :



إذا كان : ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

فإن : ا ب = ½ ا حـ

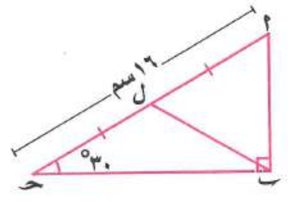
فمثلًا : إذا كان : ا حـ = ٢٠ سم فإن : ا ب = ١٠ سم

ملاحظـة

المثلث القائم الزاوية الذى قياس إحدى زواياه ٣٠° يكون قياس الزاوية الثالثة ٦٠°

ولذلك يُسمى مثلث ثلاثينى ستينى.

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

، أ حـ = ١٦ سم ، ل منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

أوجد : ١ طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ل}}$ ٢ محيط Δ أ ب ل

الحـــل

المعطيات	ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، أ حـ = ١٦ سم ، ل منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$
المطلوب	إيجاد : ١ أ ب ، ب ل ٢ محيط Δ أ ب ل
البرهـــان	∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٨ سم

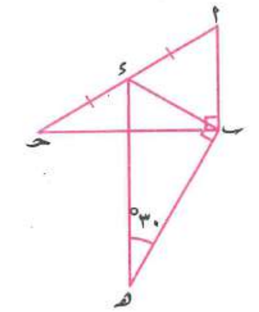
، ∵ $\overline{\text{ب ل}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

∴ ب ل = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٨ سم (المطلوب أولًا)

، ∵ أ ل = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٨ سم

∴ محيط Δ أ ب ل = ٨ + ٨ + ٨ = ٢٤ سم (المطلوب ثانيًا)





فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء ب هـ) = ٩٠°

، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ق (∠ هـ) = ٣٠°

أثبت أن : أ حـ = ء هـ



على متوسط المثلث القائم الزاوية - المثلث الثلاثينى ستينى




● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

[١] عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية هو ....

[٢] طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى ....

[٣] إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رءوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون ....

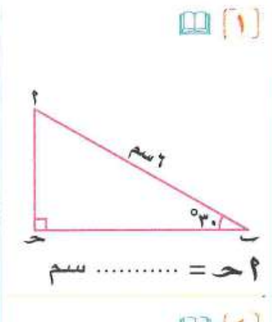
[٤] طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى ....

[٥] طول الوتر فى المثلث الثلاثينى ستينى يساوى .... طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠°

[٦] طول الوتر فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول المتوسط الخارج من رأس القائمة.

٢ باستخدام المعطيات الموجودة على كل شكل أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل :

[١] 📖

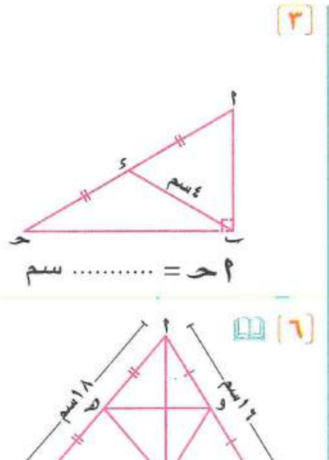


أ حـ = ... سم

[٢] 📖

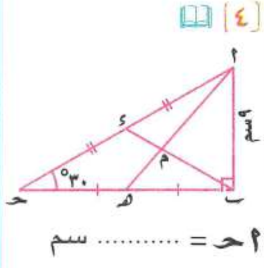
س ع = ... سم

[٣]



أ حـ = ... سم

[٤] 📖



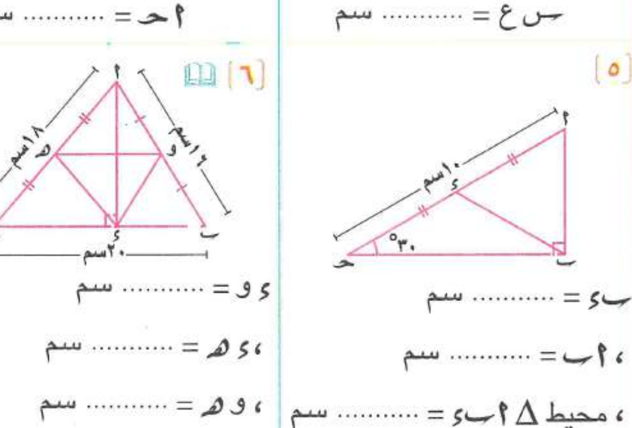
أ حـ = ... سم

، ب ء = ... سم

، م ء = ... ب ء

، م ء = ... سم

[٥]



ب ء = ... سم

، أ ب = ... سم

، محيط Δ أ ب ء = ... سم

[٦] 📖

ء و = ... سم

، ء هـ = ... سم

، و هـ = ... سم

، محيط Δ ء هـ و = ... سم

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] فى المثلث القائم الزاوية النسبة بين طول المتوسط الخارج من رأس القائمة وطول الوتر تساوى ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٣ : ٢

[٢] فى المثلث الثلاثينى ستينى النسبة بين طول الوتر وطول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ١ (د) ١ : ٣

[٣] فى المثلث الثلاثينى ستينى النسبة بين طول المتوسط الخارج من رأس القائمة وطول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ١ (د) ٢ : ٣

[٤] أبحـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ فإن : بء = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ أحـ (ب) أحـ (جـ) $\frac{١}{٢}$ بحـ (د) أب

[٥] أبحـ مثلث فيه : ق(دأ) = ٩٠° ، أحـ = $\frac{١}{٢}$ حـب فإن : ق(دحـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

[٦] أبحـ مثلث فيه : ق(دب) = ٩٠° فإذا كان : ٢ أب − أحـ = صفر فإن : ق(دحـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

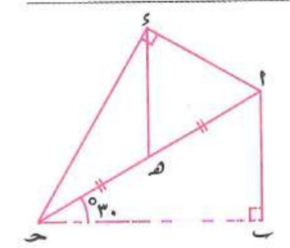
---

٤ فى الشكل المقابل :

ق(د أبحـ) = ق(د أءحـ) = ٩٠° ، ق(د أحـب) = ٣٠° ، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$



أثبت أن : أب = ءهـ

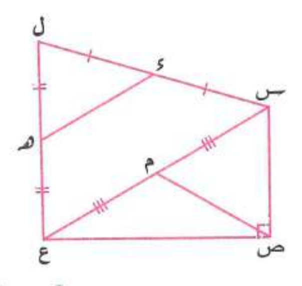


---

٥ فى الشكل المقابل :

ق(د س ص ع) = ٩٠° ، ء منتصف $\overline{\text{سل}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{عل}}$ ، م منتصف $\overline{\text{سع}}$

أثبت أن : ءهـ = ص م



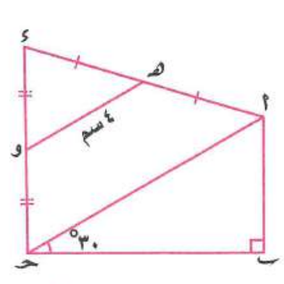
٦ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ب) = ٩٠°

، هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ ، و منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$

، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠° ، هـ و = ٤ سم

أوجد بالبرهان : طول $\overline{\text{أ ب}}$



« ٤ سم »

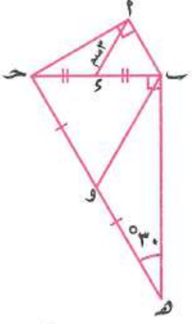
٧ **فى الشكل المقابل :**

ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ حـ ب هـ) = ٩٠°

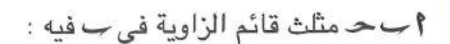
، ق (∠ ب هـ حـ) = ٣٠° ، أ ء = ٣ سم

، ء ، و منتصفا $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}}$ على الترتيب

أوجد : طول $\overline{\text{ب و}}$



« ٦ سم »



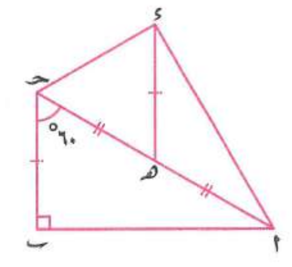
٨ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه :

ق (∠ أ حـ ب) = ٦٠° ، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

، ء هـ = ب حـ

أثبت أن : ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°



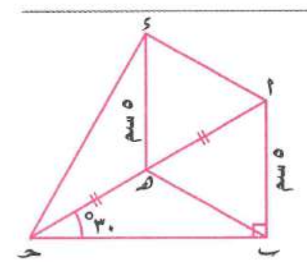
٩ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠° ، أ ب = ٥ سم

، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ، إذا كان : ء هـ = ٥ سم

فأثبت أن : ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°

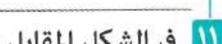


١٠ **فى الشكل المقابل :**

أ ب ء مثلث ، م منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، و ∈ $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ ، أ م = هـ و

أثبت أن : ق (∠ ب أ ء) = ٩٠°



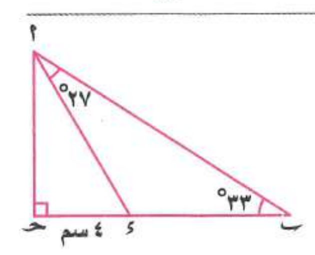
١١ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٣٣°

، ق (∠ حـ) = ٩٠° ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث : ء حـ = ٤ سم

، ق (∠ ب أ ء) = ٢٧°

أوجد : طول $\overline{\text{أ ء}}$



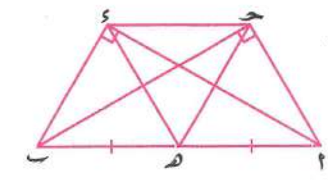
«٨ سم»

١٢ **فى الشكل المقابل :**

Δ أ ء ب قائم الزاوية فى ء ، Δ أ حـ ب قائم الزاوية فى حـ

، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

أثبت أن : Δ حـ هـ ء متساوى الساقين.



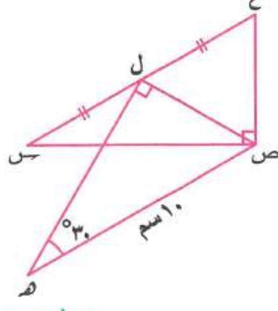
١٣ **فى الشكل المقابل :**

ق (∠ ص ل هـ) = ٩٠° ، ق (∠ هـ) = ٣٠°

، ص هـ = ١٠ سم ، ق (∠ س ص ع) = ٩٠°

، ل منتصف $\overline{\text{س ع}}$

أوجد : طول $\overline{\text{س ع}}$ بالبرهان.



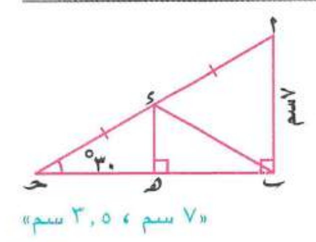
«١٠ سم»

١٤ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ب = ٧ سم ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$



«٧ سم ، ٣,٥ سم»

١٥ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، س ، ص ، ع منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$

، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ على الترتيب ، أ حـ = ٨ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ب ع}}$

« ٤ سم ، ٤ سم ، ٢ سم »

---

١٦ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، م نقطة تلاقى متوسطاته

، هـ ∈ $\overline{\text{ء حـ}}$ بحيث $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ء حـ}}$

، ء هـ = ٣ سم ، م هـ = ٤ سم

أوجد : طول $\overline{\text{ب حـ}}$

« ٣٠ سم »

---

١٧ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ ء متوازى أضلاع

فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

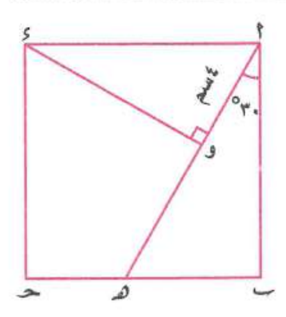
، أ ء = ١٢ سم ، هـ حـ = ٤ سم

أوجد : محيط متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

« ٤٠ سم »

---

١٨ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء مربع ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث ق (∠ ب أ هـ) = ٣٠° ، $\overline{\text{ء و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ هـ}}$

فإذا كان أ و = ٤ سم

احسب : مساحة المربع أ ب حـ ء

« ٦٤ سم^2 »

١٩ **فى الشكل المقابل :**

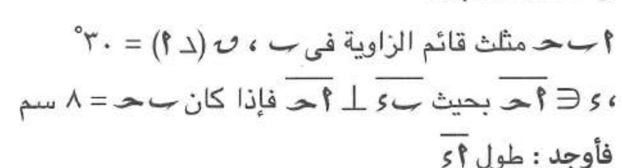
أ ب حـ ء مستطيل ، هـ ∈ ‾ء حـ‾

بحيث ق (∠ حـ ب هـ) = ٣٠° ، ق (∠ أ هـ ب) = ٩٠°

أثبت أن : حـ هـ = $\frac{1}{4}$ أ ب



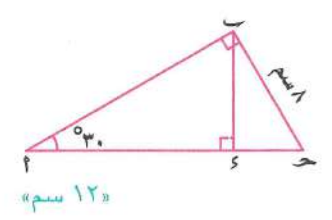
٢٠ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ) = ٣٠°

، ء ∈ ‾أ حـ‾ بحيث ‾ب ء‾ ⊥ ‾أ حـ‾ فإذا كان ب حـ = ٨ سم

فأوجد : طول ‾أ ء‾



«١٢ سم»

---

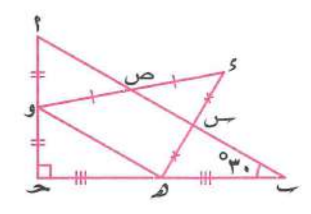
٢١ **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ

فيه : ق (∠ ب) = ٣٠°

، هـ ، و ، س ، ص منتصفات ‾ب حـ‾ ، ‾أ حـ‾ ، ‾ء هـ‾

، ‾ء و‾ على الترتيب **أثبت أن :** س ص = $\frac{1}{2}$ أ حـ



---

٢٢ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، رسم ⟵أ ء⟶ عموديًا على ‾ب حـ‾ حيث ⟵أ ء⟶ ∩ ‾ب حـ‾ = {ء}

فإذا كانت هـ ، و منتصفى ‾أ ب‾ ، ‾أ حـ‾ على الترتيب

أثبت أن : ء هـ + ء و = أ ب

تطبيق حياتى

٢٣ الشكل المقابل هو شكل تخطيطى لثلاث مدن

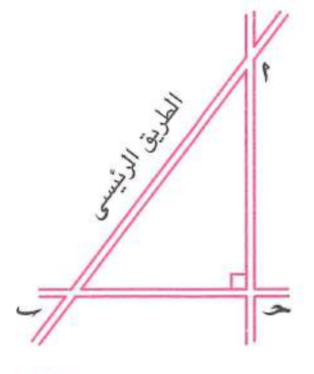
أ ، ب ، حـ حيث البعد بين المدينتين أ ، حـ هو ٤٠ كم

، والبعد بين المدينتين ب ، حـ هو ٣٠ كم

فإذا أردنا إنشاء محطة خدمة تقع على الطريق الرئيسى

فى منتصف المسافة بين المدينتين أ ، ب وإنشاء طريق

يصل هذه المحطة بالمدينة حـ فكم يبلغ طول هذا الطريق ؟

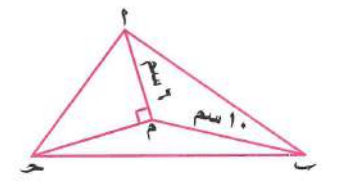


«٢٥ كم»



للمتفوقين

٢٤ **فى الشكل المقابل :**



م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

، أ م = ٦ سم ، ب م = ١٠ سم

، ق (∠ أ م حـ) = ٩٠°

أوجد مع البرهان : [١] طول $\overline{\text{أ حـ}}$ [٢] طول $\overline{\text{م حـ}}$ «١٠ سم ، ٨ سم»

---

٢٥ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، س نقطة داخله بحيث $\overleftarrow{\text{ء س}}$ ينصف ∠ أ ء حـ

، $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ينصف ∠ ء حـ ب فإذا كانت ص منتصف $\overline{\text{ء حـ}}$

فأثبت أن : س ص = ص حـ

الدرس 3

المثلث المتساوى الساقين

تمهيد

تُصنف المثلثات حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع هى :

١ مثلث مختلف الأضلاع

أ ب ≠ ب جـ ≠ جـ أ

٢ مثلث متساوى الساقين

« متطابق الضلعين »

ء هـ = ء و

٣ مثلث متساوى الأضلاع

« متطابق الأضلاع »

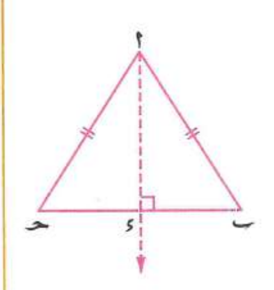
س ص = ص ع = ع س

وفيما يلى سوف ندرس العلاقات بين الزوايا فى المثلث المتساوى الساقين والمتساوى الأضلاع.

نظرية المثلث المتساوى الساقين

نظرية ١

زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.



المعطيات | ا ب حـ مثلث فيه $\overline{اب} \equiv \overline{احـ}$

المطلوب | **إثبات أن :** $\angle ب \equiv \angle حـ$

العمل | نرسم $\overleftarrow{اء} \perp \overline{ب حـ}$ حيث $\overleftarrow{اء} \cap \overline{ب حـ} = \{ء\}$

البرهان | $\because \Delta\Delta$ ا ء ب ، ا ء حـ فيهما :

ق (∠ ا ء ب) = ق (∠ ا ء حـ) = ٩٠° (عملاً)

$\overline{اب} \equiv \overline{احـ}$ (معطى)

$\overline{اء}$ (ضلع مشترك)

$\therefore \Delta$ ا ء ب $\equiv \Delta$ ا ء حـ (*)

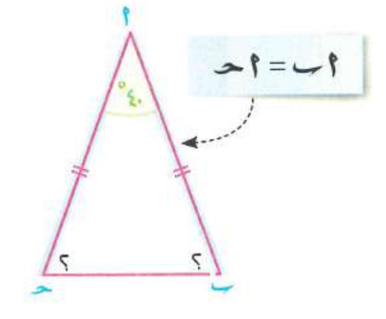
وينتج أن : $\angle ب \equiv \angle حـ$ (وهو المطلوب)

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

إذا كان ا ب حـ مثلث فيه :

ا ب = ا حـ ، ق (∠ ا) = ٤٠°

فإن : ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠° (**)



ملاحظتان

١ كل من زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين حادة.

٢ زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين من الممكن أن تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

(*) تذكر : يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق الوتر وأحد ضلعى القائمة فى أحدهما مع نظيريهما فى الآخر.

(**) تذكر : مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوى ١٨٠°

مثال ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، ق (∠ ب) = ٧٠° فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٥٥° (د) ٧٠°

٢ س ص ع مثلث فيه : س ص = س ع ، ق (∠ س) = ١٠٠°

فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

٣ Δ س ص ع قائم الزاوية فى ص ، إذا كان : س ص = ص ع

فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٤ ل م ن مثلث فيه : ل م = م ن فإن : ∠ ن تكون ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) منعكسة.

٥ Δ س ص ع مثلث متساوى الساقين فيه : ق (∠ س) = ١١٠°

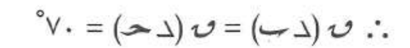
فإن : ق (∠ ص) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٣٥° (جـ) ٤٠° (د) ٤٥°

الحل

١ (أ) **تفسير الحل :** ∵ أ ب = أ حـ

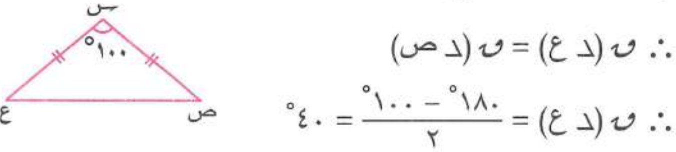
∴ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) = ٧٠°



∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٧٠°) = ٤٠°

٢ (ب) **تفسير الحل :** ∵ س ص = س ع

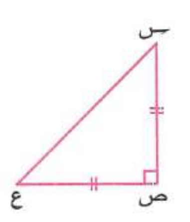
∴ ق (∠ ع) = ق (∠ ص)

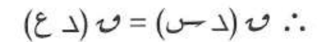


∴ ق (∠ ع) = $\frac{١٨٠° - ١٠٠°}{٢}$ = ٤٠°



٣ (ب) **تفسير الحل :** ∵ س ص = ص ع

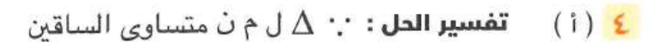




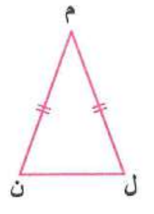
∴ ق (∠ س) = ق (∠ ع)

، ∵ ق (∠ ص) = ٩٠°

$$\therefore \text{ق}(\angle \text{ع}) = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$



٤ (أ) **تفسير الحل :** ∵ △ ل م ن متساوى الساقين

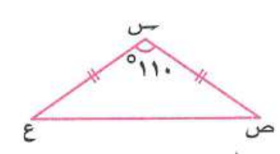


∴ كل من زاويتى القاعدة حادة

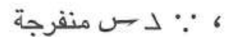
∴ ∠ ن تكون حادة.



٥ (ب) **تفسير الحل :** ∵ △ س ص ع متساوى الساقين



∴ كل من زاويتى القاعدة حادة



، ∵ ∠ س منفرجة

∴ ∠ س هى زاوية رأس المثلث

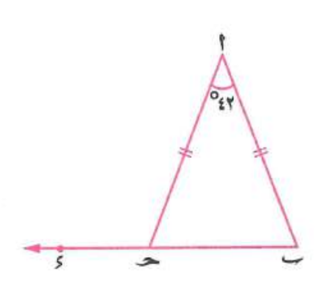
∴ ق (∠ ص) = ق (∠ ع)

$$\therefore \text{ق}(\angle \text{ص}) = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$$



مثال ٢

فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيـه : أ ب = أ حـ

، ق (∠ أ) = ٤٢° ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

أوجد : ق (∠ أ حـ ء)

الحـــل

المعطيات	أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٤٢°
المطلوب	إيجاد : ق (∠ أ حـ ء)

البرهــان	∵ مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب حـ الداخلة = ١٨٠° ، ق (∠ أ) = ٤٢°
	∴ ق (∠ ب) + ق (∠ أ حـ ب) = ١٨٠° − ٤٢° = ١٣٨°
	، ∵ أ ب = أ حـ (معطى)
	∴ ق (∠ ب) = ق (∠ أ حـ ب) = $\frac{١٣٨°}{٢}$ = ٦٩°
	، ∵ ∠ أ حـ ء خارجة عن Δ أ ب حـ
	∴ ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ٤٢° + ٦٩° = ١١١° (*) (وهو المطلوب)

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

ب ∈ $\overline{\text{ده}}$ ، حـ ∈ $\overline{\text{ده}}$ ، أ ب = أ حـ ، ب ء = حـ هـ

أثبت أن : أ ء = أ هـ



الحـــل

المعطيات	أ ب = أ حـ ، ب ء = حـ هـ
المطلوب	إثبات أن : أ ء = أ هـ
البرهــان	∵ أ ب = أ حـ (معطى) ∴ ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب)
	، ∵ ∠ أ ب ء تكمل ∠ أ ب حـ ، ∠ أ حـ هـ تكمل ∠ أ حـ ب
	∴ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ حـ هـ) (**)
	∴ ΔΔ أ ب ء ، أ حـ هـ فيهما :
	أ ب = أ حـ (معطى)
	ب ء = حـ هـ (معطى)
	ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ حـ هـ) (برهانًا)
	∴ Δ أ ب ء ≡ Δ أ حـ هـ (***) وينتج أن : أ ء = أ هـ (وهو المطلوب)

(*) تذكر : قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.

(**) تذكر : مكملات الزوايا المتساوية فى القياس متساوية فى القياس.

(***) تذكر : يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما فى أحدهما مع نظائرها فى الآخر.

مثال ٤

في الشكل المقابل :

أب = أحـ ، ق (∠ب أحـ) = ٦ س

، ق (∠حـ) = ٣ س ، بحـ // ءهـ

أوجد : ١ قيمة س

٢ ق (∠هـ ء أ)

الحـــل

المعطيات | أب = أحـ ، ق (∠ب أحـ) = ٦ س

، ق (∠حـ) = ٣ س ، بحـ // ءهـ

المطلوب | إيجاد : ١ قيمة س

٢ ق (∠هـ ء أ)

البرهان | ∵ أب = أحـ

∴ ق (∠ب) = ق (∠حـ) = ٣ س

، ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ٦ س + ٣ س + ٣ س = ١٨٠°

∴ ١٢ س = ١٨٠°

∴ س = $\frac{١٨٠°}{١٢}$ = ١٥° (المطلوب أولاً)

∴ ق (∠حـ) = ٤٥°

، ∵ بحـ // ءهـ ، حـ ء قاطع لهما

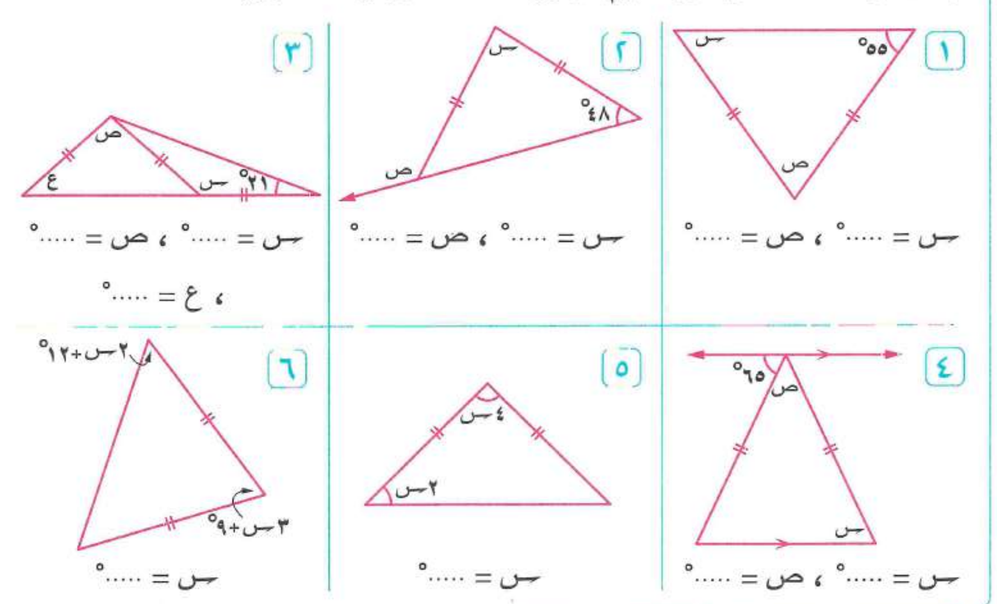
∴ ق (∠هـ ء أ) + ق (∠حـ) = ١٨٠° (داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)(*)

∴ ق (∠هـ ء أ) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥° (المطلوب ثانيًا)

(*) تذكر : إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخلتين وفى جهة واحدة من القاطع متكاملتان أى مجموع قياسيهما ١٨٠°

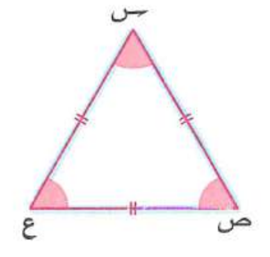
حاول بنفسك ١

في كل من الأشكال الآتية أوجد قيم الرموز المستخدمة في قياسات الزوايا :



نتيجــة

إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاث تكون متطابقة ويكون قياس كل منها ٦٠°



فمثلًا : في الشكل المقابل :

إذا كان : س ص ع مثلثًا فيه :

س ص = ص ع = س ع

فإن : ق (∠ س) = ق (∠ ص) = ق (∠ ع) = ٦٠°

مثال ٥

في الشكل المقابل :

أ ب = ب ح = ح أ = أ ء ، ق (∠ ء) = ٧٠°

أوجد : ١ ق (∠ ب ح ء) ٢ ق (∠ ب أ ء)

الحـــل

المعطيات | أ ب = ب حـ = حـ أ = أ ء ، ق (∠ ء) = ٧٠°

المطلوب | **إيجاد :** ١ ق (∠ ب حـ ء)   ٢ ق (∠ ب أ ء)

البرهـان | ∵ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع.   ∴ ق (∠ ب حـ أ) = ٦٠°

، فى Δ أ حـ ء : ∵ أ حـ = أ ء

∴ ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ ء) = ٧٠°

∴ ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ ب حـ أ) + ق (∠ أ حـ ء)

= ٦٠° + ٧٠° = ١٣٠°   (المطلوب أولًا)

، ∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى أ ب حـ ء الداخلة = ٣٦٠° (*)

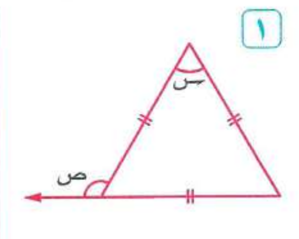
، ق (∠ ب) = ٦٠°

∴ ق (∠ ب أ ء) = ٣٦٠° − (٦٠° + ١٣٠° + ٧٠°) = ١٠٠°   (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ٢

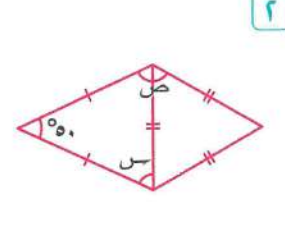
فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيم الرموز المستخدمة فى قياسات الزوايا :

١



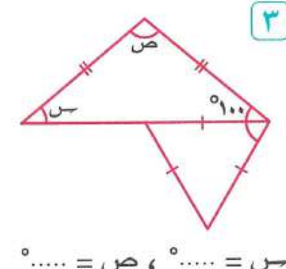
س = ...° ، ص = ...°

٢



س = ...° ، ص = ...°

٣



س = ...° ، ص = ...°

(*) تذكر: مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن = (ن − ٢) × ١٨٠°



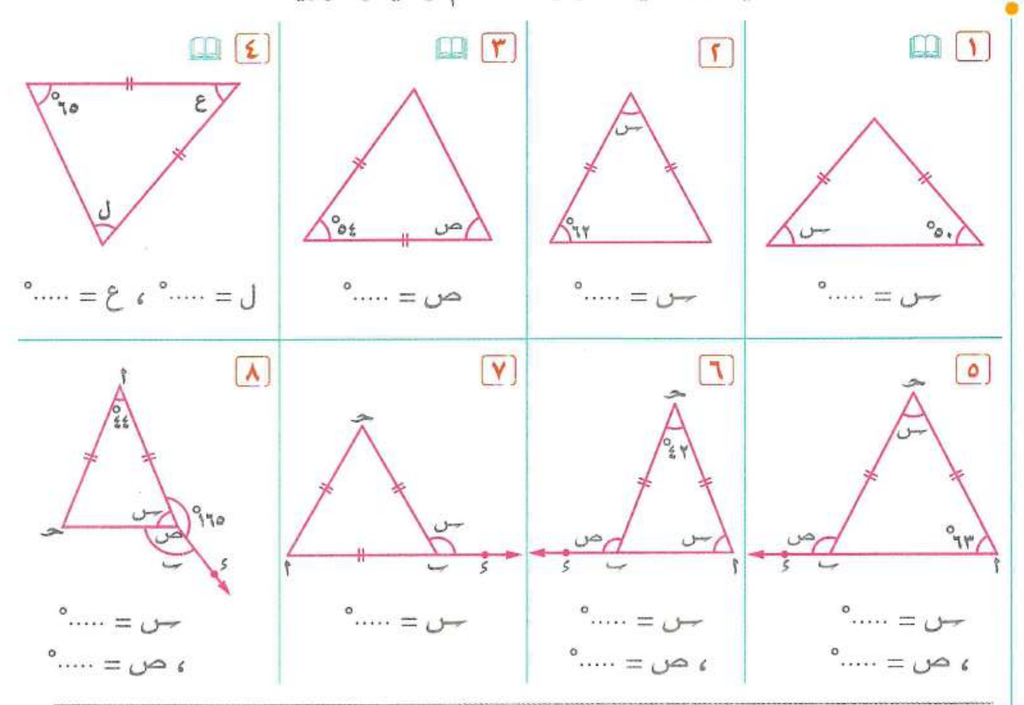
على المثلث المتساوى الساقين



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات ● أسئلة كتاب الوزارة

[1] فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى قياس الزاوية :



[2] أكمل ما يأتى :

- [١] زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين تكونان ....
- [٢] قياس كل زاوية فى المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....°
- [٣] إذا كان ء هـ و مثلث فيه : ء هـ = ء و فإن : ق (∠ هـ) = ق (∠ ....)
- [٤] فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة ٦٥° فإن قياس زاوية رأسه يساوى ....°
- [٥] فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان قياس زاوية الرأس ٤٠° فإن قياس إحدى زاويتى القاعدة يساوى ....°
- [٦] مثلث متساوى الساقين قياس زاوية رأسه ٨٠° فإذا كان قياس إحدى زاويتى قاعدته (س + ٣٠°) فإن : س = ...

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] فى Δ س ص ع إذا كان : س ص = ص ع = س ع فإن : ق (∠ س) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

[٢] قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

[٣] ل م ن مثلث فيه : ل م = م ن ، ق (∠ م) = ٧٠° فإن : ق (∠ ن) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٣٥° (جـ) ٥٥° (د) ٧٠°

[٤] أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ ، ق (∠ جـ) = ٦٥° فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٥٥° (د) ١٣٠°

[٥] Δ س ص ع فيه : ع ص = ع س ، ق (∠ ع) = ١٢٠°

فإن : ق (∠ س) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

[٦] إذا كان : أ ب جـ مثلثًا قائم الزاوية فى أ ، أ ب = أ جـ فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

[٧] Δ س ص ع متساوى الساقين فيه : ق (∠ ص) = ١٠٠°

فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٥٠° (د) ٤٠°

[٨] إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ٣٠° كان المثلث ....

(أ) منفرج الزاوية. (ب) حاد الزوايا.

(جـ) قائم الزاوية. (د) متساوى الأضلاع.

[٩] أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ ، ق (∠ ب) = ٦ س° ، ق (∠ أ) = ٣ س°

فإن : س = ...

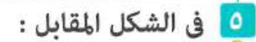
(أ) ٣٠° (ب) ١٢° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

[١٠] فى Δ س ص ع إذا كان : س ص = س ع فإن الزاوية الخارجة عند الرأس ع تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) منعكسة.

٤ **فى الشكل المقابل :**

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ جـ



، ق(∠أ) = ٤٠° ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

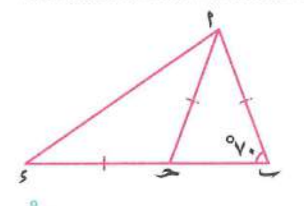
[١] أوجد : ق(∠أ ب جـ)

[٢] أثبت أن : ∠أ ب ء ≡ ∠أ جـ هـ

«٧٠°»

---

٥ **فى الشكل المقابل :**



أ ب = أ جـ = جـ ء

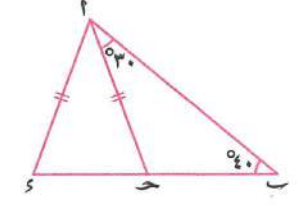
، ق(∠ب) = ٧٠°

أوجد بالبرهان : ق(∠ب أ ء)

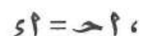
«٧٥°»

---

٦ **فى الشكل المقابل :**



ق(∠ب) = ٤٠° ، ق(∠ب أ جـ) = ٣٠°



، أ جـ = أ ء

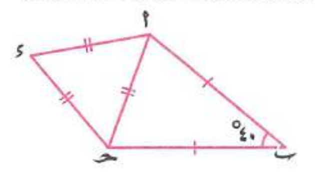
أوجد بالبرهان :

[١] ق(∠ء) [٢] ق(∠جـ أ ء)

«٧٠° ، ٤٠°»

---

٧ **فى الشكل المقابل :**



أ ء = ء جـ = أ جـ ، أ ب = ب جـ

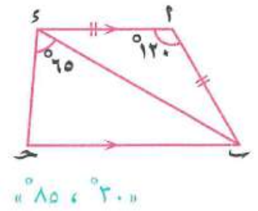
، ق(∠أ ب جـ) = ٤٠°

أوجد : ق(∠ب أ ء)

«١٢٠°»

---

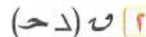
٨ **فى الشكل المقابل :**



أ ب = أ ء ، $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، ق(∠ب أ ء) = ١٢٠° ، ق(∠ب ء جـ) = ٦٥°

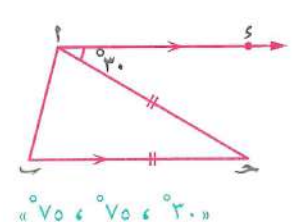
أوجد : [١] ق(∠أ ء ب)



[٢] ق(∠جـ)

«٣٠° ، ٨٥°»

٩ في الشكل المقابل :



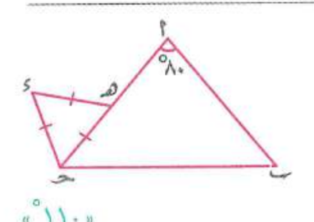
أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ب حـ

، $\overleftarrow{أء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ء أ حـ) = ٣٠°

أوجد : قياسات زوايا △ أ ب حـ

«٣٠° ، ٧٥° ، ٧٥°»

١٠ في الشكل المقابل :



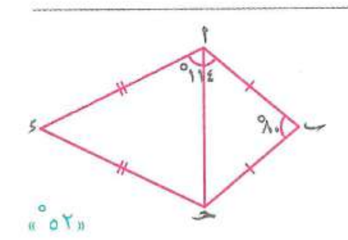
أ ب = أ حـ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٨٠°

، حـ هـ = هـ ء = حـ ء

أوجد بالبرهان : ق (∠ ب حـ ء)

«١١٠°»

١١ في الشكل المقابل :



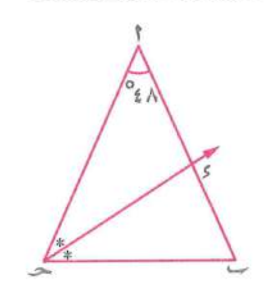
أ ب = ب حـ ، أ ء = حـ ء

، ق (∠ ب أ ء) = ١١٤° ، ق (∠ ب) = ٨٠°

أوجد : ق (∠ أ ء حـ)

«٥٢°»

١٢ في الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٤٨°

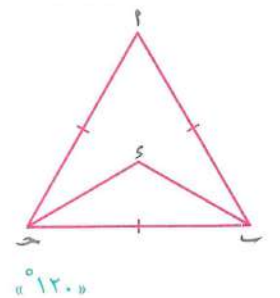
، $\overleftarrow{حـ ء}$ ينصف ∠ ب حـ أ ويقطع $\overline{أ ب}$ في ء

أوجد :

[١] ق (∠ ب) [٢] ق (∠ ب حـ ء)

«٦٦° ، ٢٣°»

١٣ في الشكل المقابل :

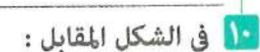


أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

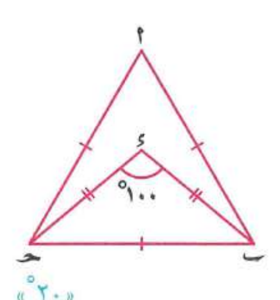
نصفت ∠ ب ، ∠ حـ بمنصفين تلاقيا في ء

أوجد : ق (∠ ب ء حـ)

«١٢٠°»



١٤ **فى الشكل المقابل :**



«٢٠°»

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

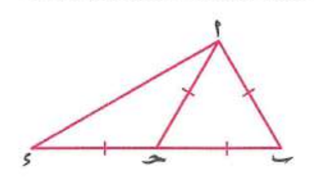
، ء ب = ء حـ

، ق (∠ ب ء حـ) = ١٠٠°

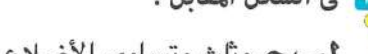
أوجد بالبرهان : ق (∠ أ ب ء)

---

١٥ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

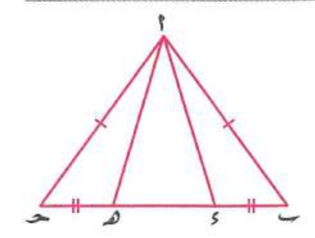


، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ بحيث ب حـ = حـ ء

أثبت أن : $\overline{\text{ب أ}} \perp \overline{\text{أ ء}}$

---

١٦ **فى الشكل المقابل :**



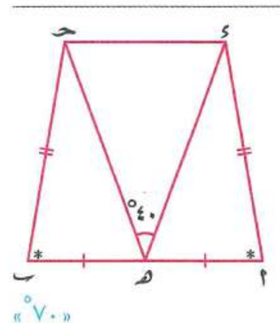
أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{ب ء}} \equiv \overline{\text{حـ هـ}}$

أثبت أن : [١] △ أ ء هـ متساوى الساقين.

[٢] ∠ أ هـ ء ≡ ∠ أ ء هـ

---

١٧ **فى الشكل المقابل :**



«٧٠°»

هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، أ ء = ب حـ

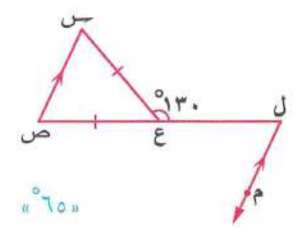
، ق (∠ أ) = ق (∠ ب)

، ق (∠ ء هـ حـ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ هـ ء حـ)

---

١٨ **فى الشكل المقابل :**



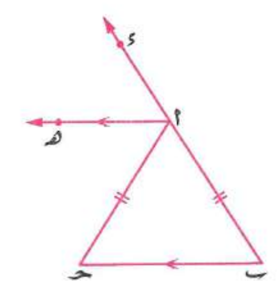
«٦٥°»

ع ∈ $\overline{\text{ل ص}}$ ، س ع = ص ع

، ق (∠ ل ع س) = ١٣٠° ، $\overleftarrow{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

أوجد : ق (∠ م ل ص)

١٩ في الشكل المقابل :



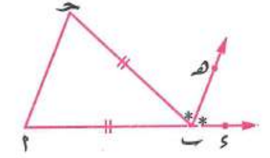
ا ∈ ب ء⃖ ، ا ب = ا جـ

، ا هـ⃖ // ب جـ‾

أثبت أن : ا هـ⃖ ينصف ∠ ء ا جـ

---

٢٠ في الشكل المقابل :

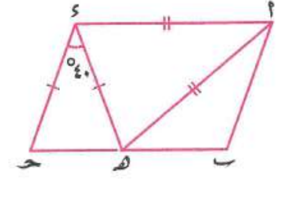


ا ب = ب جـ ، ب هـ⃖ ينصف ∠ جـ ب ء

أثبت أن : ب هـ⃖ // ا جـ‾

---

٢١ في الشكل المقابل :



ا ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ ب جـ‾

حيث ا هـ = ا ء ، ء هـ = ء جـ

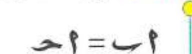
، ق (∠ هـ ء جـ) = ٤٠°

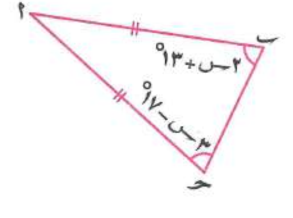
أوجد : [١] ق (∠ ا هـ ء) [٢] ق (∠ ب ا هـ)

«٧٠° ، ٣٠°»

---

٢٢ في الشكل المقابل :





ا ب = ا جـ

، ق (∠ ب) = ٢ س + ١٣°

، ق (∠ جـ) = ٣ س − ١٧°

أوجد : قياسات زوايا △ ا ب جـ

«٧٣° ، ٧٣° ، ٣٤°»

---

٢٣ في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في قياس الزاوية :

[١]

س ، ص ، ٥٨°

س = ...° ، ص = ...°

[٢]

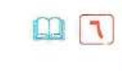
ص ، س

س = ...° ، ص = ...°

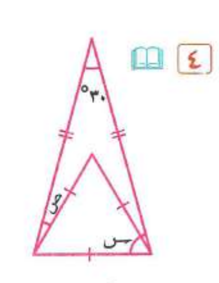
[٣]

ب ، جـ ، س ، ١٠٢° ، ٨٢° ، ٦٤° ، ء ، هـ ، ا

س = ...°

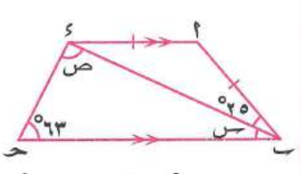


٤ 📖



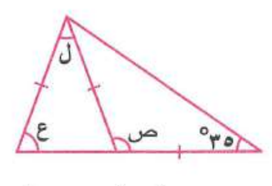
س = ...° ، ص = ...°

٥ 📖 أء // ب حـ



س = ...° ، ص = ...°

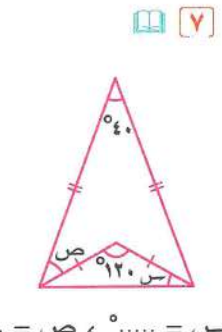
٦ 📖



ص = ...° ، ل = ...°

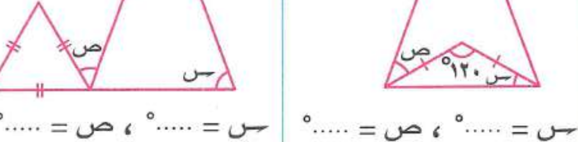
، ع = ...°

٧ 📖



س = ...° ، ص = ...°

٨ 📖



س = ...° ، ص = ...°



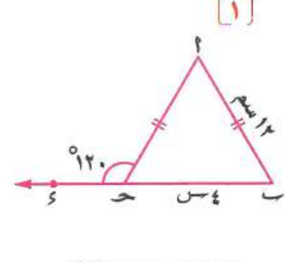
٩ 📖 أهـ ينصف ∠ حـ أ ء

س = ...°



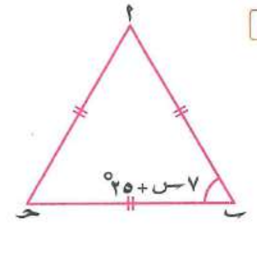
٢٤ أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية :

١



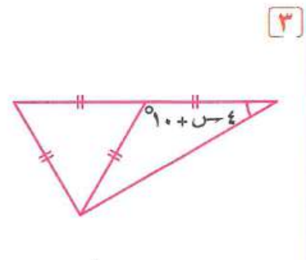
س = ... سم

٢



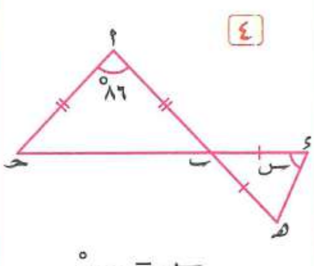
س = ...°

٣



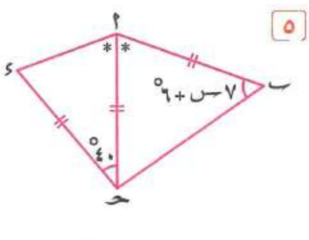
س = ...°

٤



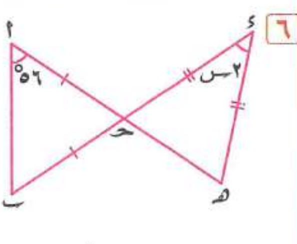
س = ...°

٥



س = ...°

٦



س = ...°

٢٥ **في الشكل المقابل :**

ب أ = ب حـ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ء}}$

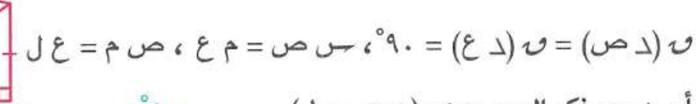
، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف كلًا من ∠ حـ ب هـ ، ∠ حـ ء هـ

أثبت أن : ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

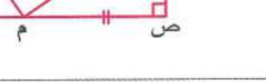


للمتفوقين

٢٦ **في الشكل المقابل :**

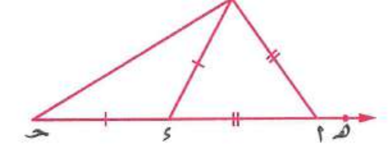


ق (∠ ص) = ق (∠ ع) = ٩٠°، س ص = م ع ، ص م = ع ل



أوجد مع ذكر السبب : ق (∠ م س ل) «٤٥°»

٢٧ **في الشكل المقابل :**

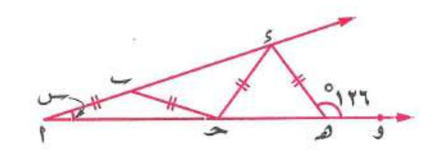


أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$

بحيث ب ء = ء حـ ، أ ء = أ ب ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$

أثبت أن : ق (∠ ب أ هـ) = ٤ ق (∠ ب حـ ء)

٢٨ **في الشكل المقابل :**



ق (∠ أ) = س°

، أ ب = ب حـ = حـ ء = ء هـ

، ق (∠ ء هـ و) = ١٢٦°

أوجد : قيمة س «١٨°»



الدرس 4 عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين

نظرية ٢

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ويكون المثلث متساوى الساقين.

المعطيات: ا ب حـ مثلث فيه : ∠ ب ≡ ∠ حـ

المطلوب: إثبات أن : ا ب ≡ ا حـ

العمل: ننصف ∠ ب ا حـ بالمنصف ا ء فيقطع ب حـ فى ء

البرهان:

∵ ∠ ب ≡ ∠ حـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

، ∵ ا ء ينصف ∠ ب ا حـ ∴ ق (∠ ب ا ء) = ق (∠ حـ ا ء)

، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°

∴ ق (∠ ا ء ب) = ق (∠ ا ء حـ)

∴ $\Delta\Delta$ ا ب ء ، ا حـ ء فيهما :

ا ء (ضلع مشترك)

ق (∠ ب ا ء) = ق (∠ حـ ا ء) (عملاً)

ق (∠ ا ء ب) = ق (∠ ا ء حـ) (برهاناً)

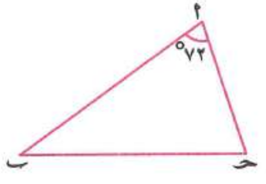
∴ Δ ا ب ء ≡ Δ ا حـ ء (*) وينتج من التطابق أن : ا ب ≡ ا حـ

ويكون Δ ا ب حـ متساوى الساقين. (وهو المطلوب)

(*) تذكر: يتطابق المثلثان إذا تطابق زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحدهما مع نظائرها فى الآخر.

مثال ١

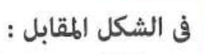
Δ أ ب ح فيه : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) = ٧٢° أثبت أن : Δ أ ب ح متساوى الساقين.



الحـــل

المعطيات	ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) = ٧٢°
المطلوب	**إثبات أن :** Δ أ ب ح متساوى الساقين.
البرهـــان	∵ ٢ ق (∠ ب) = ٧٢° ∴ ق (∠ ب) = ٧٢° ÷ ٢ = ٣٦°
	، ∵ ق (∠ أ) = ٧٢° ∴ ق (∠ ح) = ١٨٠° − (٣٦° + ٧٢°) = ٧٢°
	∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ح) ∴ ب ح = ب أ
	∴ Δ أ ب ح متساوى الساقين. (وهو المطلوب)

مثال ٢



فى الشكل المقابل :

د ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ه ∈ $\overline{\text{أ ح}}$ بحيث أ د = أ ه ، $\overline{\text{د ه}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$

أثبت أن : د ب = ه ح

الحـــل

المعطيات	أ د = أ ه ، $\overline{\text{د ه}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$
المطلوب	**إثبات أن :** د ب = ه ح
البرهـــان	فى Δ أ د ه : ∵ أ د = أ ه ∴ ق (∠ أ د ه) = ق (∠ أ ه د) (١)
	، ∵ $\overline{\text{د ه}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قاطع لهما
	∴ ق (∠ أ د ه) = ق (∠ ب) (بالتناظر)(*) (٢)
	وبالمثل : ∵ $\overline{\text{د ه}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ح}}$ قاطع لهما
	∴ ق (∠ أ ه د) = ق (∠ ح) (بالتناظر)(*) (٣)
	من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ ق (∠ ب) = ق (∠ ح)
	∴ أ ب = أ ح ، ∵ أ د = أ ه
	وبالطرح ∴ أ ب − أ د = أ ح − أ ه ∴ د ب = ه ح (وهو المطلوب)

(*) تذكر : إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متساويتان فى القياس.

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ أ) = ٤ س − ١١°

، ق (∠ ب) = ٣ س + ٤° ، ق (∠ حـ) = ٨٢°

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

الحل

المعطيات | ق (∠ أ) = ٤ س − ١١° ، ق (∠ ب) = ٣ س + ٤° ، ق (∠ حـ) = ٨٢°

المطلوب | **إثبات أن :** Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

البرهان | ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ٤ س − ١١° + ٣ س + ٤° + ٨٢° = ١٨٠°

∴ ٧ س + ٧٥° = ١٨٠° ∴ ٧ س = ١٠٥°

∴ س = ١٥° ∴ ق (∠ أ) = ٤ × ١٥° − ١١° = ٤٩°

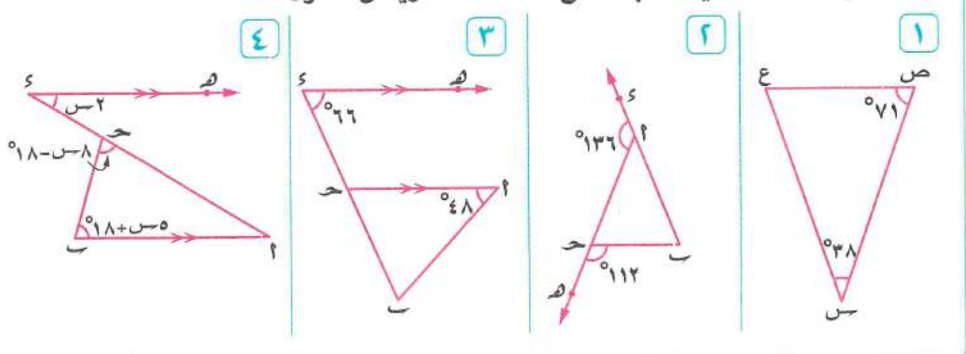
، ق (∠ ب) = ٣ × ١٥° + ٤° = ٤٩° ∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب)

∴ ب حـ = أ حـ

∴ Δ أ ب حـ متساوى الساقين. (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

فى كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية فى الطول :



نتيجــة

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.

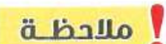
فمثلًا :



إذا كان أ ب ح مثلثًا فيه :

∠ أ ≡ ∠ ب ≡ ∠ ح فإن : أ ب = ب ح = ح أ

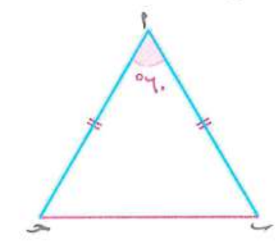
أى أن : Δ أ ب ح متساوى الأضلاع.



ملاحظة

المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه 60° يكون متساوى الأضلاع.

• **فى الشكل التالى :**



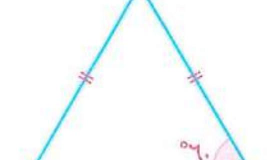
إذا كان : أ ب = أ ح ، ق (∠ أ) = ٦٠°

فإن : ق (∠ ب) = ق (∠ ح)

$= \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$

∴ Δ أ ب ح متساوى الأضلاع.

• **فى الشكل التالى :**



إذا كان : س ص = س ع

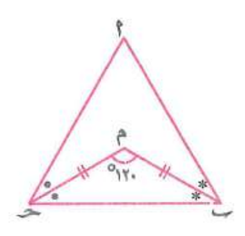
، ق (∠ ص) = ٦٠° فإن : ق (∠ ع) = ٦٠°

، ق (∠ س) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°

∴ Δ س ص ع متساوى الأضلاع.

مثال ٤

فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ب ، $\overleftarrow{\text{ح م}}$ ينصف ∠ ح

، م ب = م ح ، ق (∠ ب م ح) = ١٢٠°

أثبت أن : Δ أ ب ح متساوى الأضلاع.

الحـــل

المعطيات	$\overleftarrow{ب م}$ ينصف ∠ب ، $\overleftarrow{حـ م}$ ينصف ∠حـ ، م ب = م حـ ، ق (∠ب م حـ) = ١٢٠°
المطلوب	**إثبات أن :** △ أ ب حـ متساوى الأضلاع.
البرهان	∵ △ م ب حـ فيه : م ب = م حـ ، ق (∠ب م حـ) = ١٢٠°
	∴ ق (∠م ب حـ) = ق (∠م حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°
	، ∵ $\overleftarrow{ب م}$ ينصف ∠ب ∴ ق (∠أ ب حـ) = ٢ ق (∠م ب حـ) = ٦٠°
	، ∵ $\overleftarrow{حـ م}$ ينصف ∠حـ ∴ ق (∠أ حـ ب) = ٢ ق (∠م حـ ب) = ٦٠°
	∴ فى △ أ ب حـ يكون : ق (∠ب أ حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°
	∴ ق (∠أ ب حـ) = ق (∠أ حـ ب) = ق (∠ب أ حـ) = ٦٠°
	∴ △ أ ب حـ متساوى الأضلاع. (وهو المطلوب)

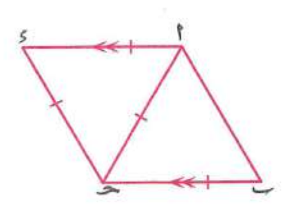
حاول بنفسك ٢

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

أ ء = ء حـ = حـ ب = حـ أ ، $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$

أثبت أن : △ أ ب حـ متساوى الأضلاع.





على عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين



اختبـــار تفاعلى

● تذكر ● فهـم ● تطبيق ● حل مشكلات ● أسئلة كتاب الوزارة

١ فى كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية فى الطول :

[١] [٢] [٣]

[٤] [٥] [٦]

[٧] [٨] [٩]

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان .... ويكون المثلث ....

[٢] إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون ....

[٣] إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق(∠أ) = ٥٠° ، ق(∠ب) = ٨٠° كان المثلث ....

[٤] إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية ٤٥° كان المثلث ....

[٥] إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين يساوى ٦٠° كان المثلث ....

[٦] مثلث أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٦٠° فإذا كان محيطه = ١٨ سم

فإن : ب حـ = ... سم

[٧] إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : حـ أ = حـ ب ، ق (∠ حـ) = ق (∠ أ)

فإن : ق (∠ ب) = ...°

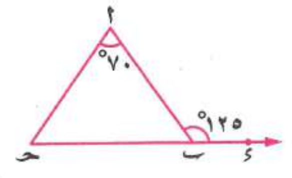


٣ في الشكل المقابل :

ء ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، ق (∠ أ ب ء) = ١٢٥°

، ق (∠ أ) = ٧٠°

أثبت أن : △ أ ب حـ متساوى الساقين.

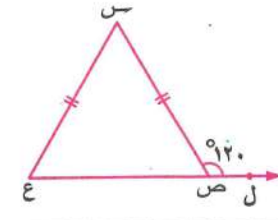


٤ في الشكل المقابل :

س ص = س ع ، ق (∠ س ص ل) = ١٢٠°

، ل ∈ $\overleftarrow{\text{ع ص}}$

أثبت أن : △ س ص ع متساوى الأضلاع.

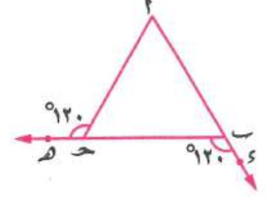


٥ في الشكل المقابل :

ء ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

، ق (∠ حـ ب ء) = ق (∠ أ حـ هـ) = ١٢٠°

أثبت أن : △ أ ب حـ متساوى الأضلاع.

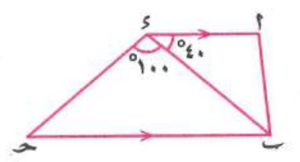


٦ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ أ ء ب) = ٤٠°

، ق (∠ ب ء حـ) = ١٠٠°

أثبت أن : △ ء ب حـ متساوى الساقين.

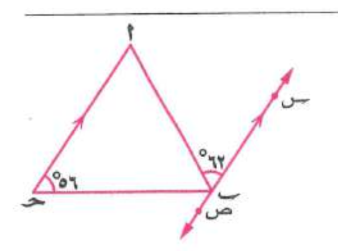


٧ في الشكل المقابل :

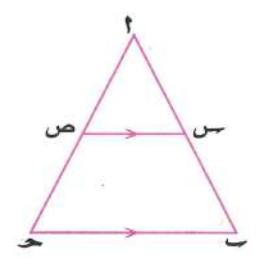
ب ∈ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

، ق (∠ أ ب س) = ٦٢° ، ق (∠ حـ) = ٥٦°

أثبت أن : أ حـ = ب حـ



٨ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، س $\in \overline{\text{أ ب}}$

، ص $\in \overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : [١] Δ أ س ص متساوى الساقين.

[٢] س ب = ص حـ

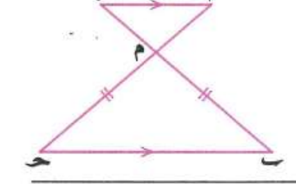
---

٩ أ ب حـ مثلث فيه : ء $\in \overline{\text{أ ب}}$ ، هـ $\in \overline{\text{ب حـ}}$ بحيث كان ب ء = ب هـ

، فإذا كان $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{أ حـ}}$ أثبت أن : أ ب = ب حـ

---

١٠ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ب ء}} = \{$م$\}$ ، م ب = م حـ ، $\overline{\text{أ ء}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : م أ = م ء

---

١١ في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

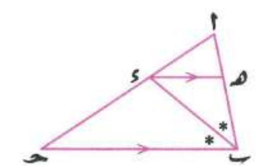
، $\overline{\text{ء و}} \parallel \overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن :

[١] ء هـ = ء و [٢] ق (∠ب أ حـ) = ق (∠هـ ء و)

---

١٢ في الشكل المقابل :



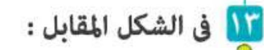
$\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ، ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى ء

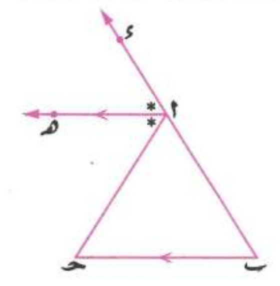
، $\overline{\text{هـ ء}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ حيث هـ $\in \overline{\text{أ ب}}$

أثبت أن : Δ هـ ب ء متساوى الساقين.

---

١٣ في الشكل المقابل :



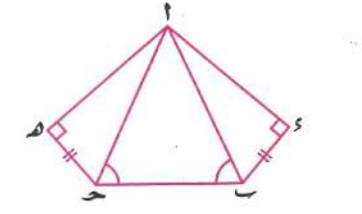


أ $\in \overleftarrow{\text{ب ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ حـ أ ء

أثبت أن : أ ب = أ حـ

١٤ في الشكل المقابل :



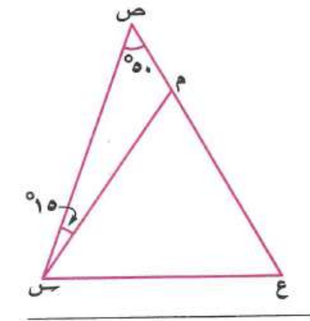
ب ء = حـ هـ ، ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب)

، ق (∠ ء) = ق (∠ هـ) = ٩٠°

برهن أن : ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ حـ أ هـ)

---

١٥ في الشكل المقابل :



ص ع س مثلث فيه : ص ع = ص س

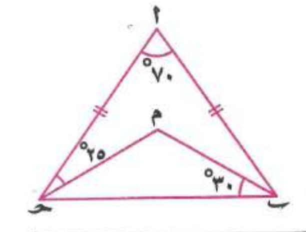
، ق (∠ ص) = ٥٠°

، ق (∠ ص س م) = ١٥°

أثبت أن : Δ م ع س متساوى الساقين.

---

١٦ في الشكل المقابل :



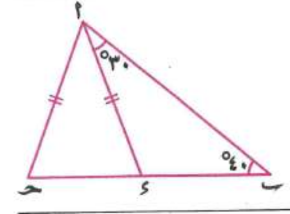
أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٧٠°

، ق (∠ م حـ أ) = ٢٥° ، ق (∠ م ب حـ) = ٣٠°

أثبت أن : Δ م ب حـ متساوى الساقين.

---

١٧ في الشكل المقابل :



أ ء = أ حـ ، ق (∠ ب) = ٤٠° ، ق (∠ ب أ ء) = ٣٠°

أثبت أن : أ ب = حـ ب

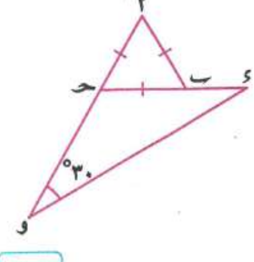
---

١٨ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

أثبت أن : Δ ء ب حـ متساوى الساقين.

---

١٩ في الشكل المقابل :

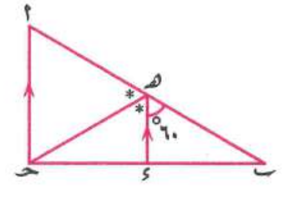


أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، و ∈ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$

، ء ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، ق (∠ ء و حـ) = ٣٠°

أثبت أن : Δ ء حـ و متساوى الساقين.

٢٠ **في الشكل المقابل :**



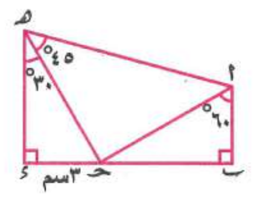
د ∈ ب‾حـ بحيث د أ = د ب = د حـ ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

أثبت أن :

[١] Δ أ ب د متساوى الأضلاع. [٢] Δ أ ب حـ قائم الزاوية.

---

٢١ **في الشكل المقابل :**



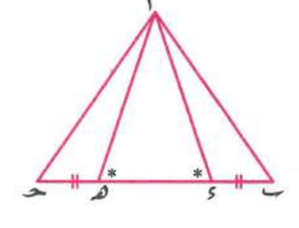
أ ب حـ مثلث ، هـ ∈ أ‾ب ، هـ‾د // أ‾حـ

، ق (∠ ب هـ د) = ٦٠° ، هـ‾حـ ينصف ∠ أ هـ د

أثبت أن : Δ أ هـ حـ متساوى الأضلاع.

---

٢٢ **في الشكل المقابل :**



حـ ∈ ب‾د ، ق (∠ ب) = ق (∠ د) = ٩٠°

، ق (∠ حـ هـ د) = ٣٠° ، ق (∠ أ هـ حـ) = ٤٥°

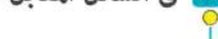
، ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠° ، حـ د = ٣ سم

أوجد : طول أ‾حـ

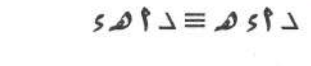
«٦ سم»

---

٢٣ **في الشكل المقابل :**



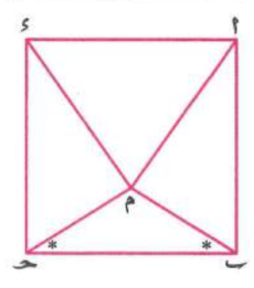
∠ أ د هـ ≡ ∠ أ هـ د





، ب ، د ، هـ ، حـ على استقامة واحدة ، ب د = حـ هـ

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.



---

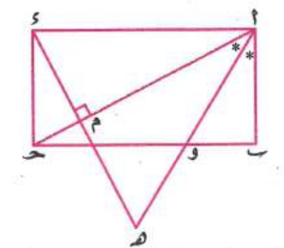
٢٤ **في الشكل المقابل :**

أ ب حـ د مربع ، م نقطة داخله

بحيث ق (∠ م ب حـ) = ق (∠ م حـ ب)

أثبت أن : Δ أ م د متساوى الساقين.

٢٥ **في الشكل المقابل :**

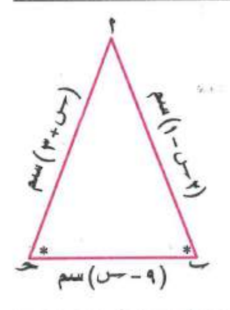


$\overline{\text{أ ب ﺣ ء}}$ مستطيل ، $\overline{\text{أ ﺣ}}$ قطر فيه ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ ﺣ

، $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{أ ﺣ}}$ حيث $\overleftarrow{\text{أ هـ}} \cap \overleftarrow{\text{ء هـ}} = \{\text{هـ}\}$ ، $\overline{\text{أ ﺣ}} \cap \overline{\text{ء هـ}} = \{\text{م}\}$

برهن أن : ء أ = ء هـ

٢٦ **في الشكل المقابل :**



أ ب ﺣ مثلث فيه :

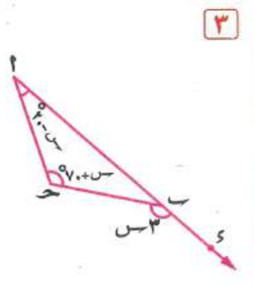
ق (∠ ب) = ق (∠ ﺣ)

أوجد : محيط المثلث.

«١٩ سم»

٢٧ **في كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول موضحًا خطوات الحل :**

١ ٢ ٣



للمتفوقين

٢٨ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ إذا كان مجموع قياسى زاويتين متطابقتين فى مثلث $\frac{٢}{٣}$ مجموع قياسات زواياه كان المثلث ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(ﺟ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

٢ أ ب ﺣ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (∠ ب) : ق (∠ ﺣ) = ١ : ٤

فإن : △ أ ب ﺣ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(ﺟ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

الدرس **5**

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة ١

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس يُنصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة.



ففى الشكل المقابل :

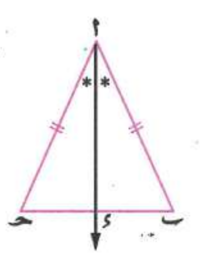
إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فإن :

١ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ أى أن : ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

٢ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

نتيجة ٢

مُنصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يُنصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه :

أ ب = أ حـ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ يُنصف ∠ ب أ حـ فإن :

١ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ (أى أن : ب ء = حـ ء)

٢ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$.

نتيجة ٣

المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة يُنصف كلاً من القاعدة وزاوية الرأس.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان ٢ ب حـ مثلثًا فيه : ٢ ب = ٢ حـ ، ٢ء ⟷ ⊥ ب حـ فإن :

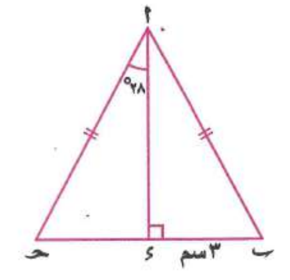
١ ء منتصف ب حـ (أى أن : ب ء = ء حـ)

٢ ق (∠ ب ٢ ء) = ق (∠ حـ ٢ ء)

* **لاحظ أنه :** يمكن برهنة النتائج الثلاث السابقة من خلال تطابق المثلثين ٢ ب ء ، ٢ حـ ء



فى الشكل المقابل :



٢ ب حـ مثلث متساوى الساقين حيث ٢ ب = ٢ حـ

، ء ∈ ب حـ بحيث ٢ء ⊥ ب حـ

، ق (∠ حـ ٢ ء) = ٢٨° ، ب ء = ٣ سم

أوجد : ١ ق (∠ ب ٢ حـ) ٢ طول ب حـ

الحل

المعطيات	٢ ب = ٢ حـ ، ق (∠ حـ ٢ ء) = ٢٨° ، ب ء = ٣ سم ، ٢ء ⊥ ب حـ
المطلوب	إيجاد : ١ ق (∠ ب ٢ حـ) ٢ طول ب حـ
البرهان	فى △ ٢ ب حـ :

∵ ٢ ب = ٢ حـ ، ٢ء ⊥ ب حـ

∴ ٢ء ينصف كلاً من زاوية الرأس ب ٢ حـ ، القاعدة ب حـ

∴ ق (∠ ب ٢ حـ) = ٢ ق (∠ حـ ٢ ء) = ٢ × ٢٨° = ٥٦° (المطلوب أولًا)

، ب حـ = ٢ ب ء = ٢ × ٣ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

مثال ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، $\overline{أ ء}$ متوسط ، ق (∠ ب أ حـ) = ١٠٠°

فإن : ق (∠ ب أ ء) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٠°

٢ فى Δ س ص ع إذا كان : س ص = س ع ، $\overleftarrow{س ء}$ ينصف ∠ ص س ع

فإن : Δ س ص ء ....

(أ) حاد الزوايا. (ب) قائم الزاوية.

(جـ) منفرج الزاوية. (د) متساوى الساقين.

٣ فى Δ ل م ن : ن م = ن ل ، ء ∈ $\overline{ل م}$ بحيث $\overline{ن ء}$ ⊥ $\overline{ل م}$ فإذا كان : ل م = ١٠ سم

فإن : ل ء = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) ٢,٥

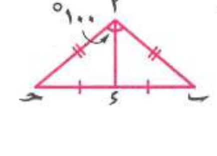
٤ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، $\overline{أ س}$ متوسط فإذا كان : ب س = ٥ سم

، ق (∠ ب أ س) = ٣٠° فإن : محيط Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٥ (د) ٣٠

الحل

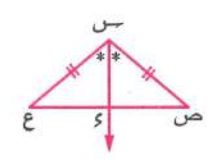
١ (ب) **تفسير الحل :** ∵ أ ب = أ حـ ، $\overline{أ ء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ



∴ ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

∴ ق (∠ ب أ ء) = $\frac{١٠٠°}{٢}$ = ٥٠°

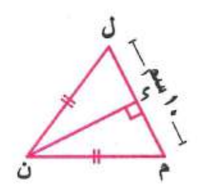
٢ (ب) **تفسير الحل :** ∵ س ص = س ع



، $\overleftarrow{س ء}$ ينصف ∠ ص س ع

∴ $\overleftarrow{س ء}$ ⊥ $\overline{ص ع}$

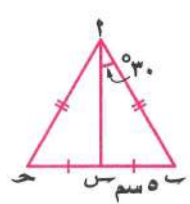
∴ Δ س ص ء قائم الزاوية



٣ (جـ) **تفسير الحل :** ∵ ن م = ن ل ، $\overline{\text{ن ء}} \perp \overline{\text{ل م}}$

∴ ء منتصف $\overline{\text{ل م}}$

∴ ل ء = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ سم



٤ (د) **تفسير الحل :** ∵ أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{أ س}}$ متوسط

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ٢ ق (∠ ب أ س)

= ٢ × ٣٠° = ٦٠°

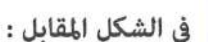
، ∵ Δ أ ب حـ متساوى الساقين

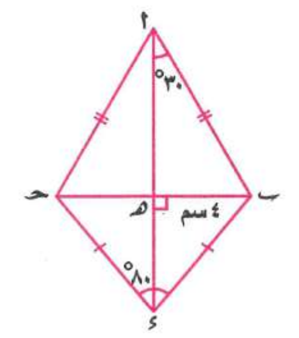
، ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠°

∴ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

، ∵ ب حـ = ٢ ب س = ١٠ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٣ × ١٠ = ٣٠ سم





فى الشكل المقابل :

أ ب ء حـ شكل رباعى فيه : أ ب = أ حـ ، ب ء = حـ ء

، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}} \cap \overline{\text{ب حـ}}$ = {هـ}

، ق (∠ ب أ ء) = ٣٠° ، ق (∠ ب ء حـ) = ٨٠°

، ب هـ = ٤ سم

أكمل ما يأتى :

١ ق (∠ ء أ حـ) = ...°

٢ ق (∠ ب ء هـ) = ...°

٣ ق (∠ أ حـ ب) = ...°

٤ هـ حـ = ... سم

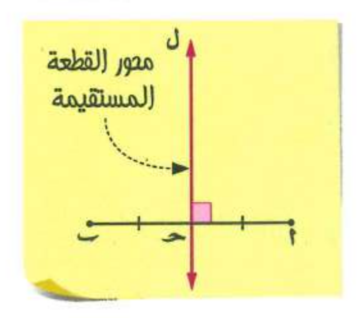
٥ أ حـ = ... سم

٦ أ هـ = ... سم

محور تماثل القطعة المستقيمة

تعريف

يسمى المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة واختصارًا محور القطعة المستقيمة.



ففى الشكل المقابل :

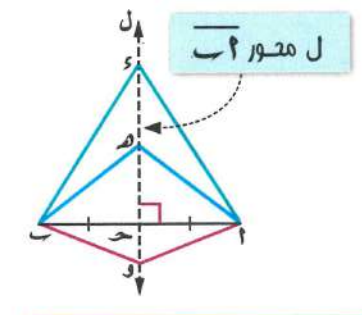
إذا كان المستقيم ل ⊥ $\overline{أب}$ ، حـ ∈ المستقيم ل

حيث حـ منتصف $\overline{أب}$

فإن : المستقيم ل محور $\overline{أب}$

خاصية

أى نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساويين من طرفيها.



ففى الشكل المقابل :

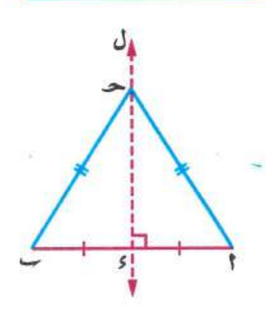
إذا كان المستقيم ل محور $\overline{أب}$

، ء ∈ المستقيم ل ، هـ ∈ المستقيم ل ، و ∈ المستقيم ل

فإن : ء أ = ء ب ، هـ أ = هـ ب ، و أ = و ب

★ **عكس الخاصية السابقة صحيح أى أنه :**

إذا كانت هناك نقطة على بُعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على محور هذه القطعة المستقيمة.

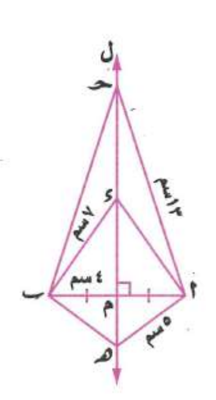


ففى الشكل المقابل :

إذا كانت حـ نقطة ما بحيث حـ أ = حـ ب

فإن : نقطة حـ تقع على محور $\overline{أب}$

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

المستقيم ل محور $\overline{أب}$ فإذا كانت النقط حـ ، ء ، هـ

تنتمى إلى المستقيم ل ، ل $\cap$ $\overline{أب}$ = {م}

بحيث أ حـ = ١٣ سم ، ء ب = ٧ سم

، أ هـ = ٥ سم ، م ب = ٤ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{أء}$ ، $\overline{هـ ب}$ ، $\overline{أم}$

الحل

المعطيات المستقيم ل محور $\overline{أب}$ ، حـ ، ء ، هـ تنتمى إلى المستقيم ل ، ل $\cap$ $\overline{أب}$ = {م}

، أ حـ = ١٣ سم ، ء ب = ٧ سم ، أ هـ = ٥ سم ، م ب = ٤ سم

المطلوب **إيجاد :** طول كل من $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{أء}$ ، $\overline{هـ ب}$ ، $\overline{أم}$

البرهان ∵ حـ ، ء ، هـ تنتمى إلى المستقيم ل محور $\overline{أب}$

∴ حـ ب = حـ أ = ١٣ سم ، ء أ = ء ب = ٧ سم

، هـ ب = هـ أ = ٥ سم ، م أ = م ب = ٤ سم (وهو المطلوب)

مثال ٤

أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، $\overleftarrow{ب س}$ ينصف ∠ أ ب حـ ويقطع $\overline{أحـ}$ فى س

، $\overleftarrow{حـ ص}$ ينصف ∠ أ حـ ب ويقطع $\overline{أب}$ فى ص فإذا كان : $\overleftarrow{ب س}$ $\cap$ $\overleftarrow{حـ ص}$ = {م}

فأثبت أن : $\overleftrightarrow{أم}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

الحـــل

المعطيات | أ ب = أ حـ ، $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

المطلوب | إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

البرهـان | ∵ أ ب = أ حـ

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب) (١)

، ∵ $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

∴ ق (∠ م ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ ب حـ) (٢)

وبالمثل : ∵ $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

∴ ق (∠ م حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ حـ ب) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن : ق (∠ م ب حـ) = ق (∠ م حـ ب)

∴ م ب = م حـ **أى أن :** م على بعدين متساويين من ب ، حـ

∴ م ∈ محور $\overline{\text{ب حـ}}$ (٤)

، ∵ أ ب = أ حـ **أى أن :** أ على بعدين متساويين من ب ، حـ

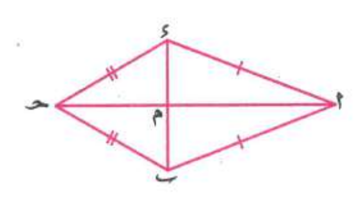
∴ أ ∈ محور $\overline{\text{ب حـ}}$ (٥)

من (٤) ، (٥) : ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ محور $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢

فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ب ء}}$ ∩ $\overline{\text{أ حـ}}$ = {م}

، أ ب = أ ء ، ب حـ = ء حـ

أثبت أن : م منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

محور تماثل المثلث المتساوى الساقين

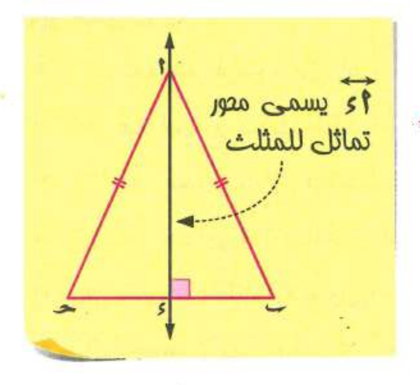
المثلث المتساوى الساقين له محور تماثل واحد هو المستقيم المرسوم من رأسه عموديًا على قاعدته.

فمثلًا : إذا كان أ ب حـ مثلثًا متساوى الساقين

حيث أ ب = أ حـ ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

فإن : $\overleftrightarrow{أ ء}$ يسمى محور تماثل للمثلث

أ ب حـ المتساوى الساقين.

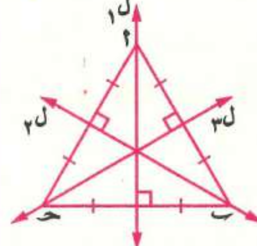


ملاحظتان

1. **المثلث المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل وهى الأعمدة المرسومة من رؤوسه الثلاثة على الأضلاع المقابلة لها.**

ففى الشكل المقابل : المستقيمات $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$

محاور تماثل للمثلث أ ب حـ المتساوى الأضلاع.



2. **المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل.**



على نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين





• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات • أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديًا على القاعدة يُسمى ....

٢ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

٣ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين يساوى ....

٤ عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع يساوى ....

٥ متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ....

٦ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ....

٧ المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ....

٨ محور القطعة المستقيمة هو ....

٩ أى نقطة تنتمى لمحور القطعة المستقيمة تكون على بعدين .... من طرفيها.

١٠ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ٦٠°

فإن : عدد محاور تماثل Δ أ ب حـ هو ....

١١ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ ب) ≠ ٦٠°

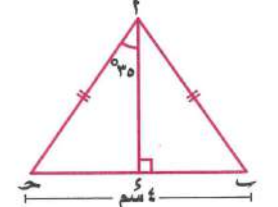
فإن : عدد محاور تماثل Δ أ ب حـ هو ....

١٢ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٦٠°

فإن : عدد محاور تماثل Δ أ ب حـ هو ....

---

٢ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب = أ حـ ، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$

، ب حـ = ٤ سم ، ق (∠ ء أ حـ) = ٣٥°

فأكمل ما يأتى :

١ ق (∠ ب أ ء) = ...°

٢ ق (∠ ب أ حـ) = ...°

٣ ق (∠ ب) = ...°

٤ ب ء = ... سم

٥ محور تماثل المثلث أ ب حـ هو ....

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : حـ ∈ محور تماثل $\overline{\text{أب}}$ فإن : أحـ − ب حـ = …………

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

٢ س ص ع مثلث فيه : س ص = س ع ، $\overline{\text{س هـ}}$ متوسط

إذا كانت : ق (∠ ص س هـ) = ٣٠° فإن : ق (∠ ص س ع) = …………

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٣ ل م ن مثلث فيه : ل م = ل ن ، هـ ∈ $\overline{\text{م ن}}$ بحيث $\overline{\text{ل هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{م ن}}$

فإذا كان : م هـ = ٤ سم فإن : م ن = ………… سم

(أ) ١٢ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

٤ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية هو ٤٥° فإن عدد محاور تماثله هو …………

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٥ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ حـ) = ١٠٠°

فإن عدد محاور تماثله هو …………

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

٦ المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٤٥° ، ٦٥° يكون عدد محاور تماثله …………

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٧ مثلث متساوى الساقين قياس إحدى زواياه الداخلة ٦٠° فإن عدد محاور تماثل هذا المثلث هو …………

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

٨ إذا كان △ أ ب حـ له محور تماثل واحد وفيه : ق (∠ أ ب حـ) = ١٢٠°

فإن : ق (∠ أ) = …………

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

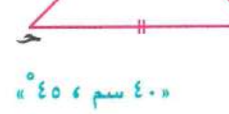
٤ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ومتساوي الساقين

، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، أ ء = ٢٠ سم

أوجد : طول $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ق (∠ ء ب حـ)

ثم استنتج أن : △ ب ء حـ متساوي الساقين.



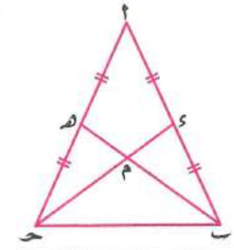
«٤٠ سم ، ٤٥°»

٥ في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب

، $\overline{\text{ب هـ}} \cap \overline{\text{حـ ء}}$ = {م}

أثبت أن : ١ $\overleftrightarrow{\text{أ م}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ٢ $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ حـ



٦ في الشكل المقابل :

△ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ

، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ب = ١٣ سم

، ب ء = ٥ سم

أوجد :

١ طول $\overline{\text{ب حـ}}$ «١٠ سم»

٢ مساحة △ أ ب حـ «٦٠ سم²»



٧ في الشكل المقابل :

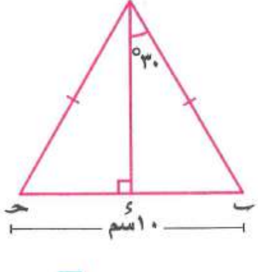
أ ب = أ حـ ، ب حـ = ١٠ سم

، ق (∠ ب أ ء) = ٣٠° ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

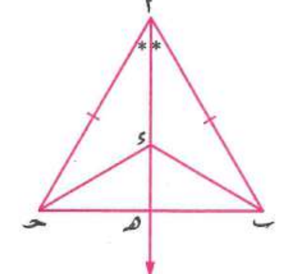
١ أوجد طول كل من : $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ «٥ سم ، ٥ $\sqrt{3}$ سم»

٢ ما عدد محاور تماثل المثلث أ ب حـ ؟

٣ ما مساحة △ أ ب حـ ؟ «٢٥ $\sqrt{3}$ سم²»



٨ **في الشكل المقابل :**



أ ب ح مثلث فيه : أ ب = أ ح ، $\overrightarrow{\text{أه}}$ ينصف ∠ ب أ ح

، $\overline{\text{أه}}$ ∩ $\overline{\text{ب ح}}$ = {ه} ، ء ∈ $\overline{\text{أه}}$

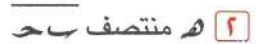
برهن أن : [١] ب ه = $\frac{1}{2}$ ب ح   [٢] ب ء = ح ء

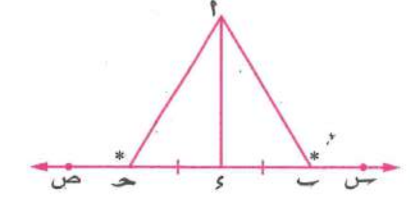
---

٩ **في الشكل المقابل :**

ح ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ ، ق (∠ أ ح ء) = ١٣٠°

، ق (∠ ب أ ه) = ق (∠ ح أ ه) = ٤٠°

أثبت أن : [١] $\overline{\text{أه}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ح}}$  [٢] ه منتصف $\overline{\text{ب ح}}$



---

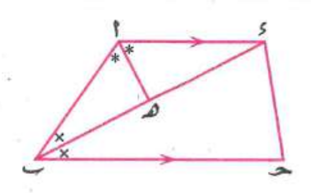
١٠ **في الشكل المقابل :**

س ، ب ، ح ، ص على استقامة واحدة

، $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط في Δ أ ب ح

، ق (∠ أ ب س) = ق (∠ أ ح ص)

أثبت أن : $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ح}}$



---

١١ **في الشكل المقابل :**

أ ب ح ء شكل رباعي فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$

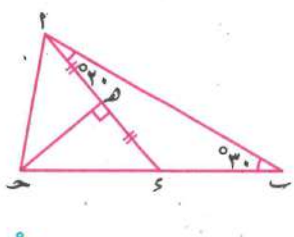
، $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب ح ، $\overrightarrow{\text{أه}}$ ينصف ∠ ب أ ء

أثبت أن : [١] أ ب = أ ء   [٢] $\overline{\text{أه}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$

[٣] ب ه = ه ء

---

١٢ **في الشكل المقابل :**



أ ب ح مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٣٠°

، ء ∈ $\overline{\text{ب ح}}$ بحيث : ق (∠ ب أ ء) = ٢٠°

، ه منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ح ه}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

أوجد : ق (∠ أ ح ه)

«٤٠°»

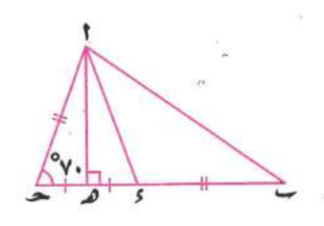
١٣ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ٧٠°

، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث : ب ء = أ حـ

، هـ منتصف $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ء حـ}}$

أوجد : ق (∠ ب)



« ٣٥° »

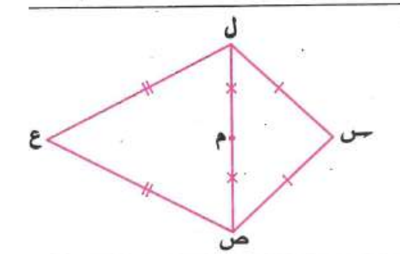
---

١٤ في الشكل المقابل :

س ص = س ل ، ع ص = ع ل

، ل م = ص م

أثبت أن : س ، م ، ع على استقامة واحدة.



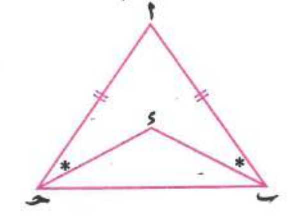
---

١٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، ء نقطة داخله

بحيث ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ حـ ء) ، أ ب = أ حـ

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ هو محور $\overline{\text{ب حـ}}$



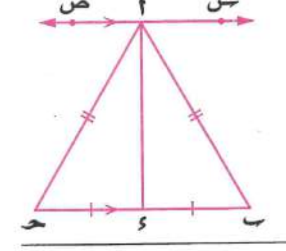
---

١٦ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ يمر بالرأس أ بحيث $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$



---

١٧ في الشكل المقابل :

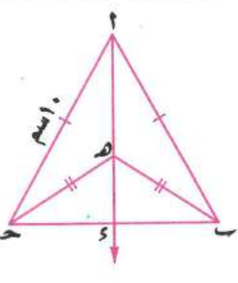
أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، هـ ب = هـ حـ

، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب حـ}}$ = {ء}

أثبت أن : ب ء = ء حـ

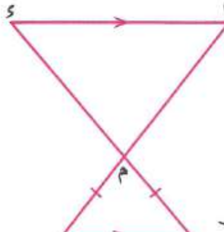
وإذا كان : ب حـ = ٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$



« ٣ سم ، $\sqrt{٩١}$ سم »

١٨ **في الشكل المقابل :**



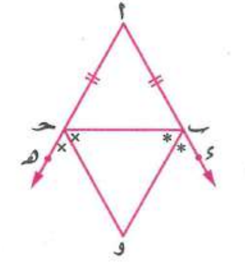
$\overline{أحـ} \cap \overline{بء} = \{م\}$ ، $\overline{أء} // \overline{بحـ}$ ، م ب = م حـ

أثبت أن : ١ Δ أ م ء متساوى الساقين.

٢ محور تماثل Δ أ م ء هو نفسه محور تماثل Δ ب م حـ

---

١٩ **في الشكل المقابل :**



أ ب = أ حـ ، ء $\in$ $\overleftarrow{أب}$ ، هـ $\in$ $\overleftarrow{أحـ}$

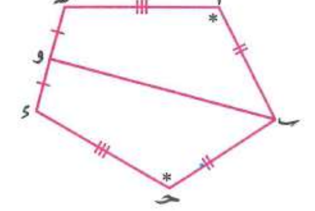
، $\overleftarrow{بو}$ ينصف ∠ ء ب حـ ، $\overleftarrow{حـو}$ ينصف ∠ ب حـ هـ

أثبت أن : ١ Δ ب و حـ متساوى الساقين.

٢ $\overleftrightarrow{أو}$ محور تماثل $\overline{بحـ}$

---

٢٠ **في الشكل المقابل :**



أ ب = ب حـ ، أ هـ = حـ ء

، ق (∠ ب أ هـ) = ق (∠ ب حـ ء) ، و منتصف $\overline{ءهـ}$

برهن أن : $\overline{بو} \perp \overline{ءهـ}$

---

٢١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء ، ب حـ = ء حـ فإن : $\overleftrightarrow{أحـ}$ .... $\overline{بء}$

(أ) يوازى (ب) يساوى (جـ) محور تماثل (د) يطابق

٢ المثلث الذى أطوال أضلاعه ٢ سم ، (س + ٣) سم ، ٥ سم يكون متساوى الساقين عندما س = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣ إذا كان طول أى ضلع فى مثلث = $\frac{1}{3}$ محيط المثلث ، فإن عدد محاور التماثل للمثلث يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

٤ إذا كان : $\overleftrightarrow{سص}$ هو محور تماثل $\overline{أب}$ فإن : ....

(أ) أس = ب ص　　(ب) أس = ب س

(جـ) ب ص = س ص　　(د) أ ص = ب س

٥ فى المعين أ ب جـ د يكون محور تماثل $\overline{أجـ}$ هو ....

(أ) $\overleftrightarrow{ب د}$　　(ب) $\overleftrightarrow{أ ب}$　　(جـ) $\overleftrightarrow{أ د}$　　(د) $\overleftrightarrow{جـ د}$

٦ فى المربع أ ب جـ د يكون $\overleftrightarrow{ب د}$ هو محور تماثل ....

(أ) $\overline{أ ب}$　　(ب) $\overline{أ جـ}$　　(جـ) $\overline{أ د}$　　(د) $\overline{جـ د}$

للمتفوقين

٢٢ فى الشكل المقابل :

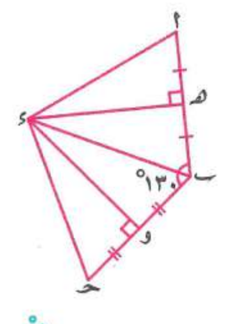
أ ب جـ د شكل رباعى فيه :

ق (∠ أ ب جـ) = ١٣٠°

، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، و منتصف $\overline{ب جـ}$

، $\overline{د هـ} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{د و} \perp \overline{ب جـ}$

أوجد : ق (∠ أ د جـ)



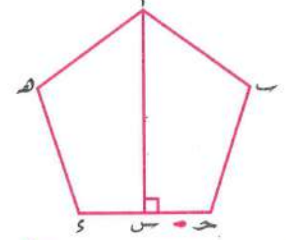
«١٠٠°»

٢٣ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د هـ شكل خماسى منتظم

، $\overline{أ س} \perp \overline{جـ د}$

أوجد : ق (∠ د أ س)

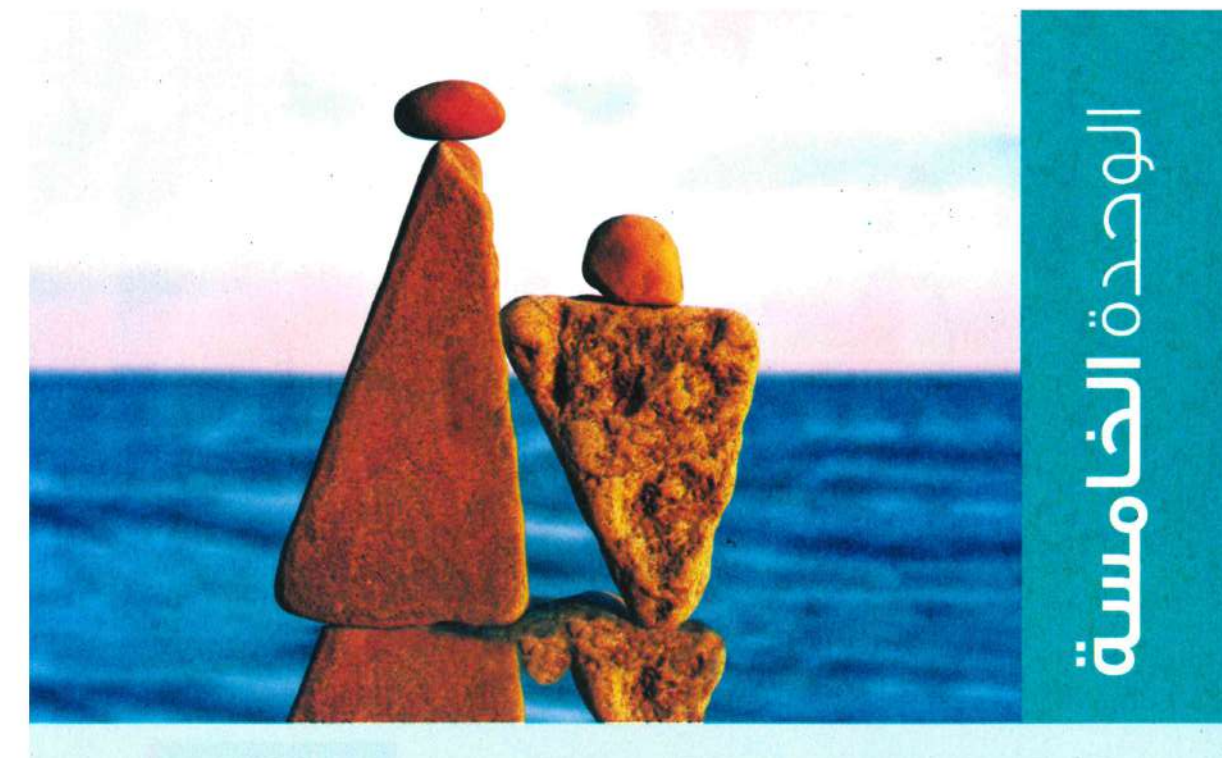


«١٨°»

عجائب الأرقام

- اختر أى عدد موجب مكون من رقمين.
- بدّل مكان الرقمين لتحصل على عدد جديد.
- اطرح العدد الأصغر من العدد الأكبر.
- هل باقى الطرح يقبل القسمة على ٩ ؟

كرر مع أعداد أخرى



التبايـــن

- **الدرس الأول :** التباين.
- **الدرس الثانى :** المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث.
- **الدرس الثالث :** المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث.
- **الدرس الرابع :** متباينة المثلث.

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف مفهوم التباين.
- يتعرف مسلمات علاقة التباين.
- يقارن بين قياسات الزوايا فى المثلث.
- يستنتج العلاقة بين قياسى زاويتين فى مثلث عندما يكون الضلعان المقابلان لهاتين الزاويتين غير متساويين فى الطول.
- يقارن بين أطوال الأضلاع فى المثلث.
- يستنتج العلاقة بين طولى ضلعين فى مثلث عندما تكون الزاويتان المقابلتان لهذين الضلعين غير متساويتين فى القياس.
- يتعرف متباينة المثلث.
- يستخدم مسلمات علاقة التباين ومتباينة المثلث فى حل المشكلات فى الهندسة.



الدرس 1 التبايـــن

مفهوم التباين

* تعرضنا خلال دراستنا لمجموعات الأعداد إلى علاقة التباين وهى العلاقة التى تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين ونعبر عنها بإحدى العلامتين الآتيتين :

العلامة $>$ وتقرأ ← « أكبر من » (أو) العلامة $<$ وتقرأ ← « أصغر من »

ولما كانت أطوال القطع المستقيمة وكذلك قياسات الزوايا هى عبارة عن أعداد فإننا نستخدم علاقة التباين للمقارنة بين طولى قطعتين مستقيمتين أو قياسى زاويتين.

* فمثلاً فى Δ أ ب حـ :

أ ب < أ حـ

إذا كان : أ حـ = ٥ سم ، أ ب = ٣ سم فإننا نستنتج أن :

طول $\overline{\text{أ حـ}}$ أكبر من طول $\overline{\text{أ ب}}$ ونكتب أ حـ > أ ب

أ، طول $\overline{\text{أ ب}}$ أصغر من طول $\overline{\text{أ حـ}}$ ونكتب أ ب < أ حـ

* وبالمثل فى الشكل ء هـ و ل :

ق (د ء) > ق (د و)

إذا كان : ق (د ء) = ١٤٠° ، ق (د و) = ٧٥° فإننا نستنتج أن :



ق (د ء) أكبر من ق (د و) ونكتب ق (د ء) > ق (د و)

أ، ق (د و) أصغر من ق (د ء) ونكتب ق (د و) < ق (د ء)

* وفيما يلى نذكر الطالب بمسلمات علاقة التباين والتى سبق له دراستها.

مسلمات علاقة التباين

لأى أربعة أعداد أ ، ب ، جـ ، ء :

(١) إذا كان : أ > ب	فإن : أ + جـ > ب + جـ
(٢) إذا كان : أ > ب	فإن : أ - جـ > ب - جـ
(٣) إذا كان : أ > ب ، جـ > ٠	فإن : أ جـ > ب جـ
(٤) إذا كان : أ > ب ، ب > جـ	فإن : أ > جـ
(٥) إذا كان : أ > ب ، جـ > ء	فإن : أ + جـ > ب + ء

مثال ١

فى الشكل المقابل :

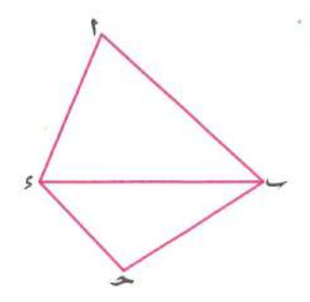
إذا كانت : ب ، جـ تنتميان إلى $\overline{أء}$ بحيث أ ب > جـ ء

فأثبت أن : أ جـ > ب ء

الحل

المعطيات	ب ، جـ تنتميان إلى $\overline{أء}$ ، أ ب > جـ ء
المطلوب	إثبات أن : أ جـ > ب ء
البرهان	∵ أ ب > جـ ء (معطى) وبإضافة ب جـ للطرفين
	∴ أ ب + ب جـ > جـ ء + ب جـ ∴ أ جـ > ب ء (وهو المطلوب)

مثال ٢



فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ أ ء ب) ≥ ق (∠ أ ب ء)

، ق (∠ جـ ب ء) > ق (∠ جـ ء ب)

فأثبت أن : ق (∠ أ ء جـ) > ق (∠ أ ب جـ)

الحـــل

المعطيات | ق (∠ أ ء ب) > ق (∠ أ ب ء) ، ق (∠ حـ ب ء) < ق (∠ حـ ء ب)

المطلوب | إثبات أن : ق (∠ أ ء حـ) > ق (∠ أ ب حـ)

البرهـان | ∵ ق (∠ حـ ب ء) < ق (∠ حـ ء ب) (معطى)

∴ ق (∠ حـ ء ب) > ق (∠ حـ ب ء) (١)

، ∵ ق (∠ أ ء ب) > ق (∠ أ ب ء) (معطى) (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ق (∠ حـ ء ب) + ق (∠ أ ء ب) > ق (∠ حـ ب ء) + ق (∠ أ ب ء)

∴ ق (∠ أ ء حـ) > ق (∠ أ ب حـ) (وهو المطلوب)

مثال ٣

في الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ حـ ب)

، ب ء = ء حـ

فأثبت أن : ق (∠ أ ب ء) > ق (∠ أ حـ ء)

الحـــل

المعطيات | ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ حـ ب) ، ب ء = ء حـ

المطلوب | إثبات أن : ق (∠ أ ب ء) > ق (∠ أ حـ ء)

البرهـان | ∵ ء ب = ء حـ

∴ ق (∠ ء ب حـ) = ق (∠ ء حـ ب) (١)

، ∵ ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ حـ ب) (معطى) (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ ق(∠ أ ب حـ) − ق(∠ ء ب حـ) > ق(∠ أ حـ ب) − ق(∠ ء حـ ب)

∴ ق(∠ أ ب ء) > ق(∠ أ حـ ء) (وهو المطلوب)



تذكر أن

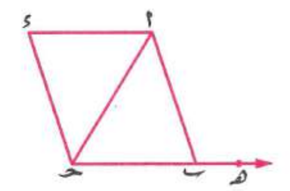
قياس أى زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أى زاوية داخلة ما عدا المجاورة لها.

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

أثبت أن : ق(∠ أ ب هـ) > ق(∠ أ حـ ء)



عجائب الأرقام

اختر عددًا صحيحًا من ١ إلى ٩ ، اضربه في ٩ ثم اضرب الناتج في ١٢٣٤٥٦٧٩

لاحظ الناتج !



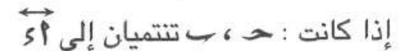



تمارين 6 على التباين

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات • أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل كلاً مما يأتي بوضع علامة > أو < مكان النقط :

١ في الشكل المقابل :



إذا كانت : حـ ، ب تنتميان إلى $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

بحيث ء حـ < ب أ

فإن : أ حـ .... ء ب

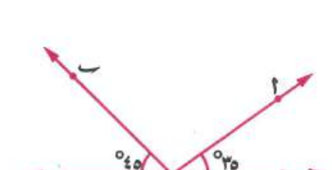
٢ في الشكل المقابل :

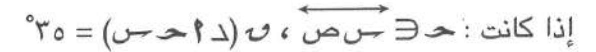
إذا كانت : ب ، حـ تنتميان إلى $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

بحيث أ ب > حـ ء

فإن : أ حـ .... ب ء

٣ في الشكل المقابل :





إذا كانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، ق (∠ أ حـ س) = ٣٥°

، ق (∠ ب حـ ص) = ٤٥°

فإن : ق (∠ س حـ ب) .... ق (∠ أ حـ ص)

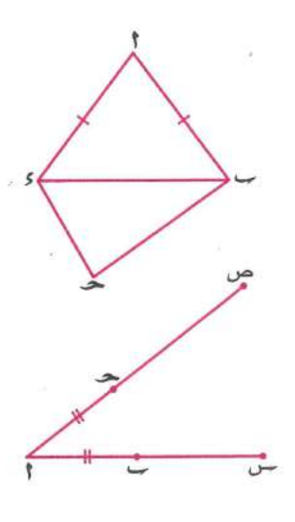
٤ في الشكل المقابل :



أ ب = أ ء

، ق (∠ ء ب حـ) < ق (∠ حـ ء ب)

فإن : ق (∠ أ ب حـ) .... ق (∠ أ ء حـ)



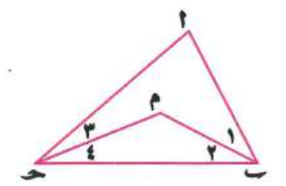
٥ في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب = أ حـ

، أ ص > أ س

فإن : ب س .... حـ ص

٦ في الشكل المقابل :



ق(د ١) > ق(د ٣) ، ق(د ٢) > ق(د ٤)

فإن : ق(د أ ب ح) .... ق(د أ ح ب)



٧ في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب ح مثلث

، ح ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ ، ص ∈ $\overleftarrow{\text{ح ء}}$

فإن : ق(د أ ء ص) .... ق(د ء أ ح)

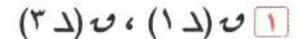
، ق(د أ ب ح) .... ق(د أ ء ص)

---

٢ استعن بالشكل المقابل في ترتيب القياسات المعطاة تصاعديًا

حيث ب ، ح ، ء ، هـ

على استقامة واحدة في ترتيب.



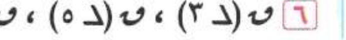
١ ق(د ١) ، ق(د ٣)

٢ ق(د ٢) ، ق(د ٤)

٣ ق(د ٥) ، ق(د ٣)

٤ ق(د ٢) ، ق(د ٦)

٥ ق(د ٣) ، ق(د ١) ، ق(د ٥)

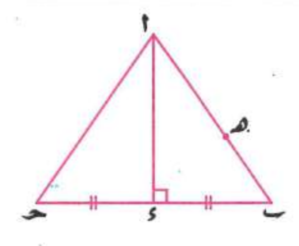


٦ ق(د ٣) ، ق(د ٥) ، ق(د ٧)

٧ ق(د ٣) ، ق(د ١) ، ق(د ٧) ، ق(د ٥)

---

٣ في الشكل المقابل :

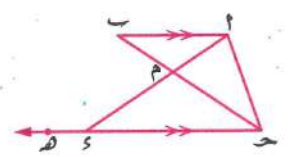


هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ح}}$

، ء منتصف $\overline{\text{ب ح}}$

أثبت أنَّ : أ ح > أ هـ

٤ **في الشكل المقابل :**



أب // حـء ، أء ∩ حـب = {م}

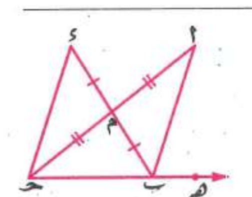
، هـ ∈ حـء ، هـ ∉ حـء

أثبت أن : [١] ق (∠ أحـء) > ق (∠ أبحـ)

[٢] ق (∠ أءهـ) > ق (∠ أبحـ)

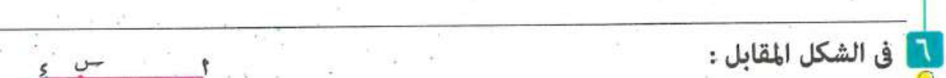


٥ **في الشكل المقابل :**



هـ ∈ حـب ، م منتصف كل من : أحـ ، بء

أثبت أن : ق (∠ أبهـ) > ق (∠ أحـء)

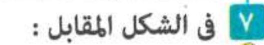


٦ **في الشكل المقابل :**

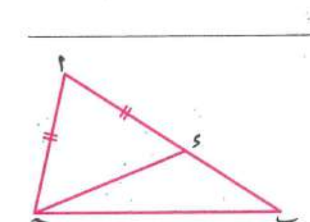
أبحـء متوازي أضلاع ، س ∈ أء

، ص ∈ بحـ بحيث ءس < بص

أثبت أن : أس + أب > حـص + حـء



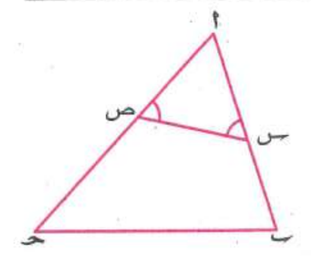
٧ **في الشكل المقابل :**



ء ∈ أب حيث أء = أحـ

أثبت أن : ق (∠ أحـب) > ق (∠ ب)

٨ **في الشكل المقابل :**



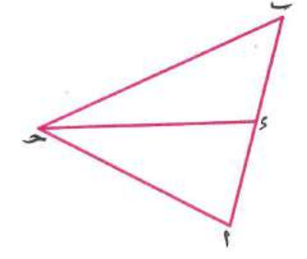
أبحـ مثلث فيه : أحـ > أب

، س ∈ أب ، ص ∈ أحـ

بحيث ق (∠ أس ص) = ق (∠ أص س)

أثبت أن : ص حـ > س ب

٩ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث فيه :

$\overline{\text{أب}} \equiv \overline{\text{أحـ}}$ ، ء $\in \overline{\text{أب}}$

أثبت أن : ق (∠ أ ء حـ) > ق (∠ أ حـ ب)

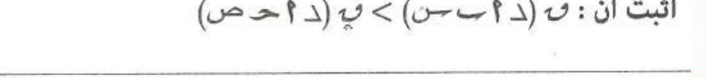
---

١٠ **في الشكل المقابل :**

ب ∈ $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ بحيث :

ق (∠ أ حـ ب) > ق (∠ أ ب حـ)

، $\overrightarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ أ ب ء ، $\overrightarrow{\text{حـ ص}}$ ينصف ∠ أ حـ هـ



أثبت أن : ق (∠ أ ب س) > ق (∠ أ حـ ص)

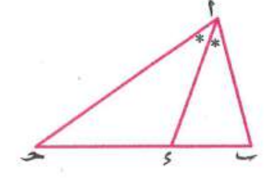
---

١١ م نقطة داخل المثلث أ ب حـ **أثبت أن :** ق (∠ أ م ب) > ق (∠ حـ)



للمتفوقين

١٢ **في الشكل المقابل :**



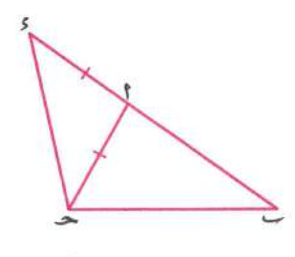
أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) > ق (∠ حـ)

، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

أثبت أن : ∠ أ ء حـ منفرجة.

---

١٣ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ حـ ب) > ق (∠ أ ب حـ)

، أ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث أ حـ = أ ء

أثبت أن : ∠ ب حـ ء منفرجة.

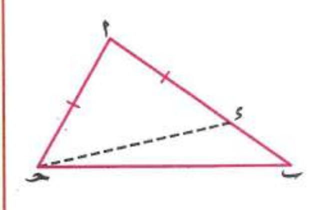
الدرس **2**

المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

- من دراستنا للوحدة السابقة تعلمنا أنه إذا تطابق ضلعان فى مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان متساويتين فى القياس.
- وفيما يلى سوف ندرس العلاقة بين قياسى زاويتين فى مثلث عندما يكون الضلعان المقابلان لهاتين الزاويتين غير متساويين فى الطول.

نظرية

إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر.



المعطيات | أ ب جـ مثلث فيه : أ ب > أ جـ

المطلوب | إثبات أن : ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ)

العمل | نأخذ نقطة ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ ء = أ جـ

البرهان | فى المثلث أ جـ ء :

∵ أ ء = أ جـ

∴ ق (∠ أ ء جـ) = ق (∠ أ جـ ء) (١)

، ∵ ∠ ا ء حـ خارجة عن المثلث ء ب حـ

∴ ق (∠ ا ء حـ) > ق (∠ ب)(*) (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق (∠ ا حـ ء) > ق (∠ ب)

، ∵ ق (∠ ا حـ ب) > ق (∠ ا حـ ء)

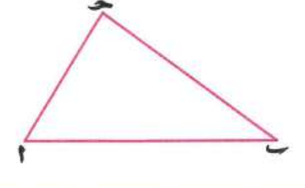
∴ ق (∠ ا حـ ب) > ق (∠ ا ب حـ) (وهو المطلوب)

! ملاحظة

أكبر زوايا المثلث فى القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا وقياسها أكبر من ٦٠°

وأصغر زوايا المثلث فى القياس تقابل أصغر أضلاع المثلث طولًا وقياسها أقل من ٦٠°

أى أنه : فى المثلث ا ب حـ



إذا كان : ا ب > ب حـ > ا حـ

فإن : ق (∠ حـ) > ق (∠ ا) > ق (∠ ب)

، ق (∠ حـ) > ٦٠° ، ق (∠ ب) < ٦٠°

مثال ١

ا ب حـ ء شكل رباعى فيه :

ا ب = ٥ سم ، ب حـ = ٢ سم ، حـ ء = ٣ سم ، ء ا = ٤ سم

أثبت أن : ق (∠ ء حـ ب) > ق (∠ ء ا ب)

الحل

المعطيات ا ب = ٥ سم ، ب حـ = ٢ سم ، حـ ء = ٣ سم ، ء ا = ٤ سم

المطلوب إثبات أن : ق (∠ ء حـ ب) > ق (∠ ء ا ب)

العمل نرسم $\overline{\text{ا حـ}}$

البرهان فى △ ا حـ ء : ∵ ا ء = ٤ سم ، حـ ء = ٣ سم

∴ ا ء > حـ ء

∴ ق (∠ ا حـ ء) > ق (∠ حـ ا ء) (١)

(*) تذكر : قياس أى زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أى زاوية داخلة ما عدا المجاورة لها.

في Δ أ ب حـ : ∵ أ ب = ٥ سم ، حـ ب = ٢ سم

∴ أ ب > حـ ب

∴ ق (∠ أ حـ ب) > ق (∠ حـ أ ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ق (∠ أ حـ ء) + ق (∠ أ حـ ب) > ق (∠ حـ أ ء) + ق (∠ حـ أ ب)

∴ ق (∠ ء حـ ب) > ق (∠ ء أ ب) (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان Δ س ص ع فيه : س ع > س ص

فإن : ق (∠ ع) .... ق (∠ ص)

(أ) <　　(ب) >

(جـ) =　　(د) ≤

٢ مثلث أ ب حـ فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ١٠ سم فإن : ....

(أ) ق (∠ أ) > ق (∠ ب)　　(ب) ق (∠ ب) > ق (∠ حـ)

(جـ) ق (∠ ب) < ق (∠ حـ)　　(د) ق (∠ ب) > ق (∠ أ)

٣ مثلث س ص ع فيه : س ص = ٤ سم ، ص ع = ٨ سم ، س ع = ٦ سم

فإن : ....

(أ) ق (∠ ع) > ق (∠ ص)　　(ب) ق (∠ ع) > ق (∠ س)

(جـ) ق (∠ س) < ق (∠ ص)　　(د) ق (∠ ع) < ق (∠ ص)

٤ في Δ أ ب حـ : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٤ سم

فإن الترتيب التصاعدي لقياسات زوايا المثلث أ ب حـ هو ....

(أ) ∠ حـ ، ∠ ب ، ∠ أ　　(ب) ∠ حـ ، ∠ أ ، ∠ ب

(جـ) ∠ أ ، ∠ ب ، ∠ حـ　　(د) ∠ ب ، ∠ أ ، ∠ حـ

مثـال ٢

ا ب حـ مثلث فيه : ا ب > ا حـ ، نُصفت زاوية ب ا حـ بالمنصف $\overleftarrow{\text{ا ء}}$ فقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء

أثبت أن : المثلث ا ب ء منفرج الزاوية.

الحــل

المعطيات ا ب حـ مثلث فيه : ا ب > ا حـ ، $\overleftarrow{\text{ا ء}}$ ينصف ∠ ب ا حـ

المطلوب **إثبات أن :** Δ ا ب ء منفرج الزاوية.

البرهــان فى Δ ا ب حـ : ∵ ا ب > ا حـ ∴ ق (∠ ١) > ق (∠ ٢)

، ∵ $\overleftarrow{\text{ا ء}}$ ينصف ∠ ب ا حـ ∴ ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)

∴ ق (∠ ١) + ق (∠ ٤) > ق (∠ ٢) + ق (∠ ٣)

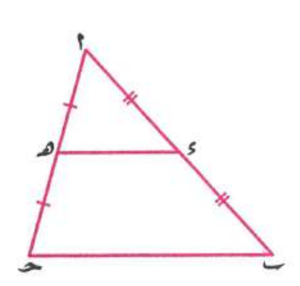
ولكن ق (∠ ١) + ق (∠ ٤) = ق (∠ ٥) (*)

(لأن ∠ ٥ خارجة عن Δ ا ء حـ)

∴ ق (∠ ٥) > ق (∠ ٢) + ق (∠ ٣) (**)

∴ Δ ا ب ء منفرج الزاوية. (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢



فى الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه : ا ب > ا حـ

، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ على الترتيب.

أثبت أن : ق (∠ ا هـ ء) > ق (∠ ا ء هـ)

(*) **تذكر:** قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها.

(**) **تذكر:** إذا كان قياس زاوية فى مثلث أكبر من مجموع قياسى الزاويتين الأخريين فإن هذه الزاوية منفرجة.



تمارين 7

على المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث





• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية ....

٢ فى Δ أ ب جـ إذا كان : أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ٦ سم

فإن أصغر زواياه فى القياس هى ....

٣ فى Δ د هـ و إذا كان : د هـ > هـ و فإن : ق(∠ و) > ....

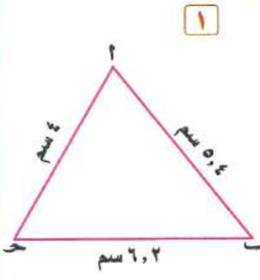
٤ فى أى مثلث أ ب جـ إذا كان : أ ب > أ جـ > ب جـ

فإن : ق(∠ ....) > ق(∠ ....) > ق(∠ ....)

---

٢ 📖 **فى كل من الأشكال التالية أكمل باستخدام < أ، > :**

١

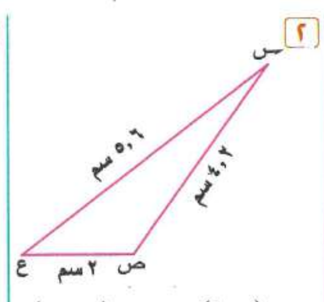


• ق(∠ أ) ..... ق(∠ ب)

• ق(∠ أ) ..... ق(∠ جـ)

• ق(∠ ب) ..... ق(∠ جـ)

٢

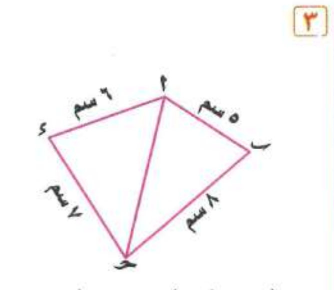


• ق(∠ ع) ..... ق(∠ ص)

• ق(∠ س) ..... ق(∠ ص)

• ق(∠ ع) ..... ق(∠ س)

٣



• ق(∠ ب أ جـ) ..... ق(∠ ب جـ أ)

• ق(∠ د أ جـ) ..... ق(∠ د جـ أ)

• ق(∠ ب أ د) ..... ق(∠ ب جـ د)

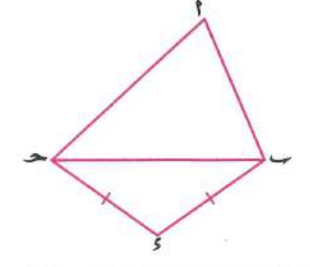
---

٣ رتب قياسات زوايا المثلث أ ب جـ فى كل من الحالتين الآتيتين ترتيبًا تصاعديًا :

١ إذا كان : أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٥ سم ، أ جـ = ١٠ سم

٢ 📖 إذا كان : أ ب = ٥,٧ سم ، ب جـ = ٨,٥ سم ، أ جـ = ٦ سم

٤ فى الشكل المقابل :



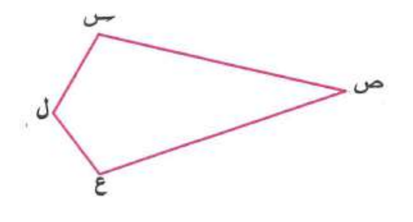
أحـ > أب

، ءب = ءحـ

أثبت أن : ق (∠ أبء) > ق (∠ أحـء)

---

٥ فى الشكل المقابل :



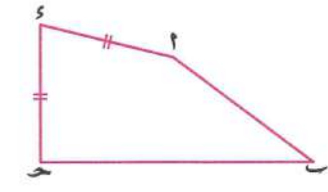
س ص > س ل

، ص ع > ع ل

برهن أن : ق (∠ س ل ع) > ق (∠ س ص ع)

---

٦ فى الشكل المقابل :



أبحـء شكل رباعى فيه : أء = ءحـ ، بحـ > أب

برهن أن : ق (∠ أ) > ق (∠ حـ)

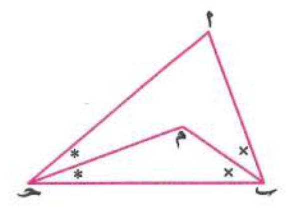
---

٧ أبحـء شكل رباعى فيه : $\overline{أب}$ أكبر الأضلاع طولاً ، $\overline{حـء}$ أصغر الأضلاع طولاً.

أثبت أن : ق (∠ بحـء) > ق (∠ بأء)

---

٨ فى الشكل المقابل :





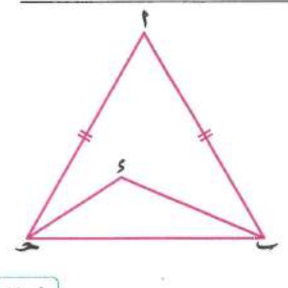
أبحـ مثلث ، $\overleftarrow{بم}$ ينصف ∠ أبحـ

، $\overleftarrow{حـم}$ ينصف ∠ أحـب فإذا كان : م حـ > م ب

برهن أن : ق (∠ أبحـ) > ق (∠ أحـب)

---

٩ فى الشكل المقابل :



أبحـ مثلث فيه : أب = أحـ

، ءب < ءحـ

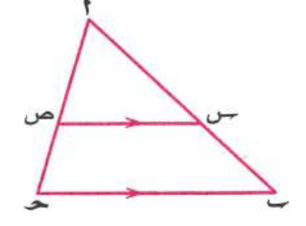
أثبت أن : ق (∠ أبء) > ق (∠ أحـء)

١٠ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب > أ حـ

، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

برهن أن : ق (∠ أ ص س) > ق (∠ أ س ص)



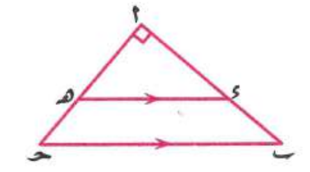
---

١١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٩٠° ، أ ب > أ حـ

، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : ق (∠ أ هـ ء) > ٤٥°



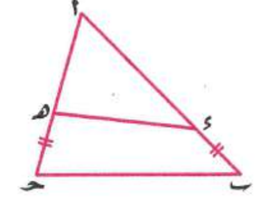
---

١٢ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب > أ حـ ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

، هـ ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ بحيث ب ء = حـ هـ

أثبت أن : ق (∠ أ هـ ء) > ق (∠ أ ء هـ)

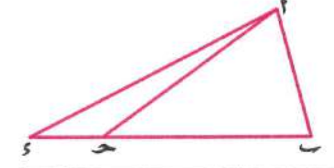


---

١٣ في الشكل المقابل :

حـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث أ حـ > أ ب

أثبت أن : ق (∠ أ ب ء) > ق (∠ ء)



---

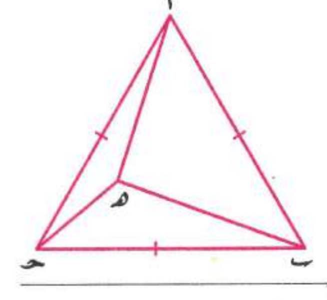
١٤ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، هـ نقطة داخله

، ق (∠ هـ حـ ب) > ق (∠ هـ ب حـ)

برهن أن : [١] ق (∠ أ ب هـ) > ق (∠ أ حـ هـ)

[٢] ق (∠ أ) > ق (∠ أ ب هـ) > ق (∠ أ حـ هـ)

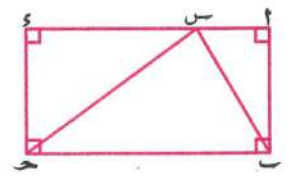


---

١٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل ، س ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ بحيث س حـ > س ب

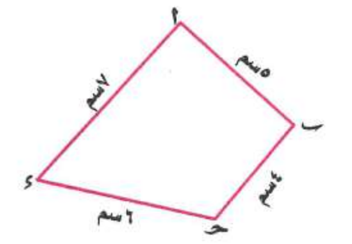
أثبت أن : ق (∠ أ ب س) < ق (∠ س حـ ء)



١٦ Δ أ ب جـ فيه : أ ب > أ جـ ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ء هـ}$ // $\overline{أ جـ}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى هـ

برهن أن : ق (∠ جـ أ هـ) > ق (∠ ء أ هـ)

١٧ **فى الشكل المقابل :**



أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٥ سم

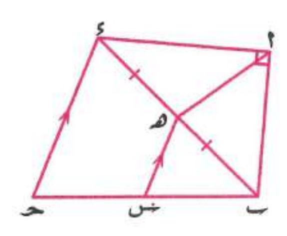
، ب جـ = ٤ سم ، جـ ء = ٦ سم ، ء أ = ٧ سم

أثبت أن : ١ ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ ء جـ)

٢ ق (∠ ب جـ ء) > ق (∠ ب أ ء)

٣ ق (∠ ب) + ق (∠ جـ) > ١٨٠°

١٨ **فى الشكل المقابل :**



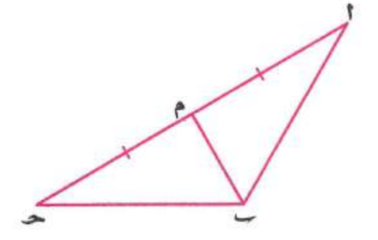
أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ أ) = ٩٠°

، $\overline{أ هـ}$ متوسط فى المثلث أ ب ء ، $\overleftrightarrow{هـ س}$ // $\overline{ء جـ}$

، $\overline{هـ س}$ ∩ $\overline{ب جـ}$ = {س} فإذا كان أ هـ > هـ س

فأثبت أن : ق (∠ جـ) > ق (∠ ء ب جـ)

١٩ **فى الشكل المقابل :**

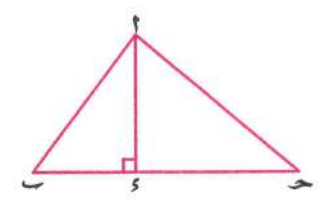


$\overline{ب م}$ متوسط فى Δ أ ب جـ

، ب م < أ م

برهن أن : ∠ أ ب جـ منفرجة.

٢٠ **فى الشكل المقابل :**



أ ب جـ مثلث فيه : أ جـ > أ ب

، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ قطعها فى ء

برهن أن : ق (∠ ب أ ء) > ق (∠ جـ أ ء)

٢١ أ ب حـ مثلث ، $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف زاوية أ ويقطع $\overline{ب حـ}$ في ء فإذا كان أ حـ > أ ب

فبرهن أن : ∠ أ ء حـ منفرجة.

---

٢٢ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ حـ > ب ء **برهن أن :** ∠ ء منفرجة.

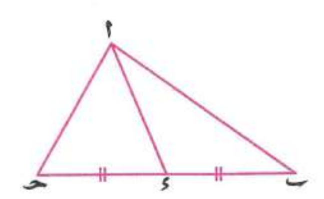
للمتفوقين

٢٣ أ ب حـ مثلث ، ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإذا كان محيط Δ أ حـ ء > محيط Δ أ ب ء

فأثبت أن : ق (∠ ب) > ق (∠ حـ)

---

٢٤ 📖 **في الشكل المقابل :**



أ ب > أ حـ ، ء ب = ء حـ

برهن أن : ق (∠ ب أ ء) > ق (∠ حـ أ ء)

الدرس 3

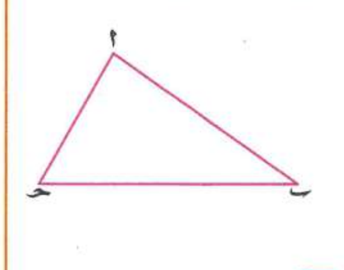
المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

• من دراستنا للوحدة السابقة تعلمنا أنه إذا تساوت زاويتان في القياس في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متساويين في الطول.

• وفيما يلي سوف ندرس العلاقة بين طولي ضلعين في مثلث عندما تكون الزاويتان المقابلتان لهذين الضلعين غير متساويتين في القياس.

نظرية

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى.



المعطيات | Δ أ ب ح فيه : ق (∠ ح) > ق (∠ ب)

المطلوب | إثبات أن : أ ب > أ ح

البرهان | ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ح}}$ قطعتان مستقيمتان.

∴ يجب أن تتحقق إحدى الحالات الآتية :

[١] أ ب > أ ح   [٢] أ ب = أ ح   [٣] أ ب < أ ح

إذا لم يكن أ ب > أ ح

فإما أ ب = أ ح   أ،   أ ب < أ ح

* إذا كان : أب = أجـ

فإن : ق(∠جـ) = ق(∠ب)

وهذا يخالف المعطى حيث : ق(∠جـ) > ق(∠ب)

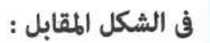
* وإذا كان : أب < أجـ

فإن : ق(∠جـ) < ق(∠ب) حسب النظرية السابقة

وهذا أيضًا يخالف المعطى حيث : ق(∠جـ) > ق(∠ب)

∴ يجب أن يكون : أب > أجـ (وهو المطلوب)

مثال ١



في الشكل المقابل :

أب جـ مثلث فيه : ق(∠ب أجـ) = ٧٠°

، $\overleftarrow{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ء أب) = ٣٠°

أثبت أن : أب > أجـ

الحـــل

المعطيات | $\overleftarrow{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ب أجـ) = ٧٠° ، ق(∠ء أب) = ٣٠°

المطلوب | إثبات أن : أب > أجـ

البرهـان | ∵ $\overleftarrow{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ب) = ق(∠ء أب) = ٣٠° (بالتبادل)(*)

∴ في △ أب جـ :

ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٧٠°) = ٨٠°

∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب)

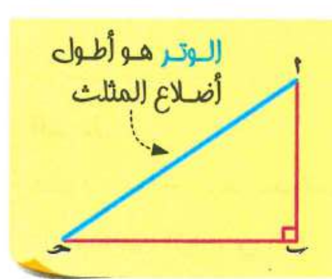
∴ أب > أجـ (وهو المطلوب)

(*) تذكر: إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتان في القياس.

نتائج

نتيجة ١

فى المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب

فإن : ق (∠ ب) > ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) > ق (∠ حـ)

لأن : ∠ ب قائمة ، وكل من : ∠ أ ، ∠ حـ حادة

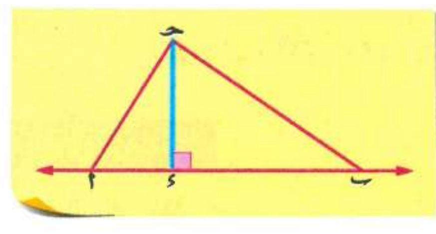


وبالتالى يكون : أ حـ > ب حـ ، أ حـ > أ ب (حسب النظرية السابقة)

* **لاحظ أنه :** فى المثلث المنفرج الزاوية الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أطول أضلاع المثلث.

نتيجة ٢

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.



ففى الشكل المقابل :

إذا كانت : حـ ∉ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

بحيث $\overline{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

فإن : $\overline{\text{حـ ب}}$ وتر فى Δ حـ ء ب القائم الزاوية فى ء

، $\overline{\text{حـ أ}}$ وتر فى Δ حـ ء أ القائم الزاوية فى ء ، وهكذا ...



وحسب نتيجة (١) يكون : حـ ب > حـ ء ، حـ أ > حـ ء ، وهكذا ...

أى أن : حـ ء < حـ ب ، حـ ء < حـ أ

تعريف

بُعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم.

ففى الشكل السابق : بُعد النقطة حـ عن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هو طول $\overline{\text{حـ ء}}$

مثال ٢

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : س ، ص ، هـ منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ على الترتيب ، ق (∠ ب ء حـ) = ٩٠°

أثبت أن : ء هـ > س ص



الحـــل

المعطيات | س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب ء حـ) = ٩٠°

المطلوب | **إثبات أن :** ء هـ > س ص

البرهان | فى Δ أ ب ء : ∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ ب ء (*) (١)

، فى Δ ء ب حـ : ∵ ق (∠ ب ء حـ) = ٩٠° ، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ (٢)

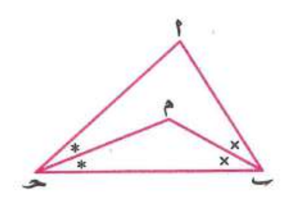
، ∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ وتر المثلث ب ء حـ ∴ ب حـ > ب ء

∴ $\frac{١}{٢}$ ب حـ > $\frac{١}{٢}$ ب ء (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ ء هـ > س ص (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ > أ ب

، $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ، $\overleftarrow{\text{حـ م}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

أثبت أن : م حـ > م ب

(*) تذكر: القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها يساوى نصف طوله.



على المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث



اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات • أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

- ١ إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع ....
  وإذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية ....
- ٢ أصغر زوايا المثلث قياسًا يقابلها ....
- ٣ أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولًا هو ....
- ٤ أقصر بُعد بين نقطة معلومة ومستقيم معلوم هو ....
- ٥ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ١١٠° يكون أكبر أضلاعه طولًا هو ....
- ٦ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٣٠°
  فإن أصغر أضلاع المثلث طولًا هو ....
- ٧ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ب) + ق (∠ حـ)
  فإن أكبر الأضلاع طولًا هو ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

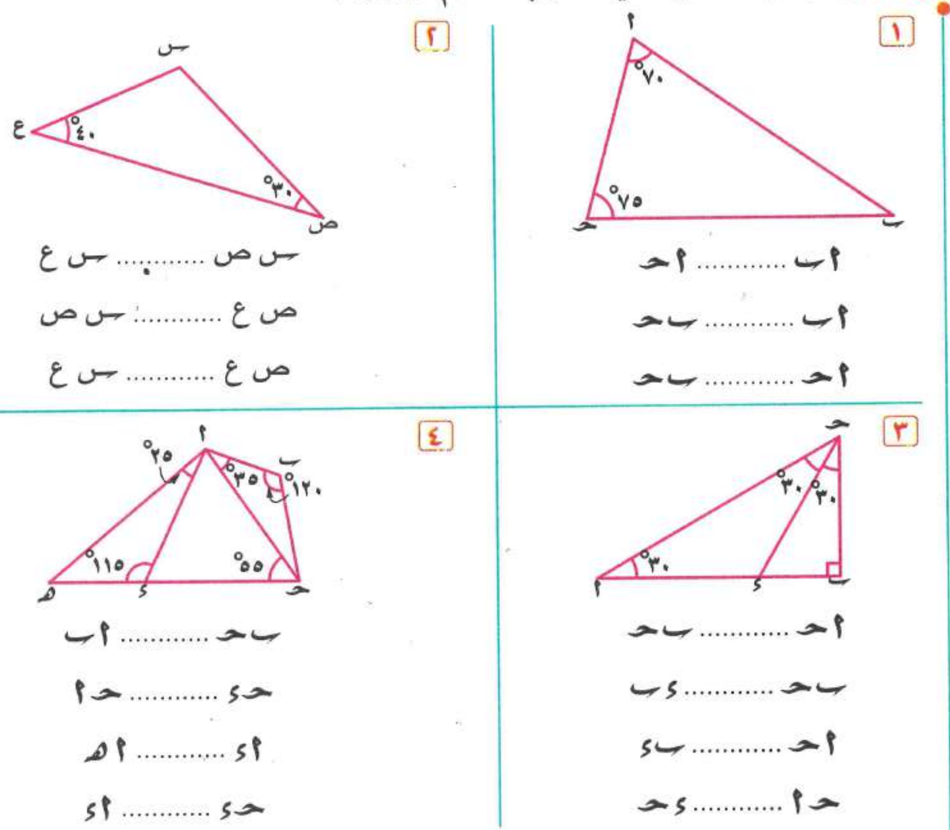
- ١ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ ب) > ق (∠ حـ) فإن : ....
  (أ) أ ب > أ حـ (ب) ب حـ > أ حـ (جـ) أ حـ > أ ب (د) أ ب > ب حـ
- ٢ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° فإن : ....
  (أ) أ حـ > حـ ب (ب) أ ب > أ حـ (جـ) ب حـ > أ حـ (د) أ ب = أ حـ
- ٣ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٧٠° فإن : ....
  (أ) أ ب < أ حـ (ب) أ ب > أ حـ (جـ) $\overline{أب} \perp \overline{أحـ}$ (د) أ ب = أ حـ

٤ في Δ س ص ع إذا كان : ق (∠ س) = ١١٠° ، ق (∠ ص) = ٤٠°

فإن : س ص .... س ع

(أ) > (ب) < (جـ) = (د) //

٣ في كل من الأشكال التالية أكمل باستخدام < أ، > :



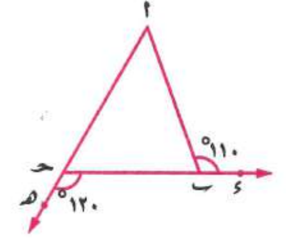
٤ Δ س ص ع فيه : ق (∠ س) = ٤٥° ، ق (∠ ص) = ٨٥° ، ق (∠ ع) = ٥٠°

رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعديًا.

٥ Δ أ ب جـ فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٧٥°

رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

٦ **في الشكل المقابل :**



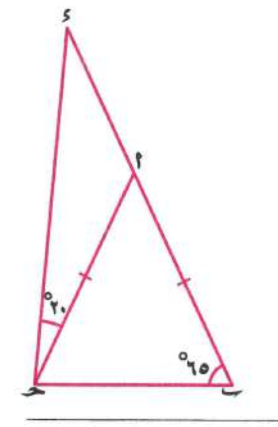
أهـ ↔ // ب جـ ، ق (∠ د أ هـ) = ٧٠°

، ق (∠ هـ أ جـ) = ٣٠°

أثبت أن : أ جـ > أ ب

---

٧ **في الشكل المقابل :**



أ ب جـ مثلث ، د ∈ جـ ب ↔ ، هـ ∈ أ جـ ↔

، ق (∠ أ ب د) = ١١٠° ، ق (∠ ب جـ هـ) = ١٢٠°

برهن أن : أ ب > ب جـ

---

٨ **في الشكل المقابل :**

أ ب = أ جـ

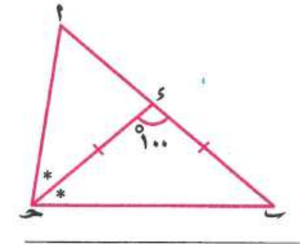
، ق (∠ أ ب جـ) = ٦٥° ، ق (∠ أ جـ د) = ٢٠°

، أ ∈ ب د

برهن أن : أ ب > أ د

---

٩ **في الشكل المقابل :**



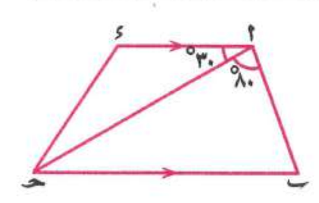
أ ب جـ مثلث ، جـ د ↔ ينصف ∠ جـ ويقطع أ ب في د

، ق (∠ ب د جـ) = ١٠٠° ، د ب = د جـ

برهن أن : أ جـ > د ب

---

١٠ **في الشكل المقابل :**



أ د // ب جـ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٨٠°

، ق (∠ د أ جـ) = ٣٠°

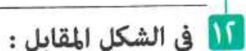
برهن أن : ب جـ > أ ب

١١ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{جـ ء}} = \{\text{م}\}$

، $\overline{\text{أجـ}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$

برهن أن : أب > جـ ء

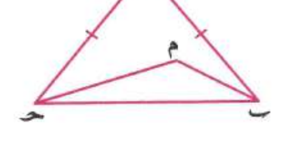


١٢ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ ، م نقطة داخله

بحيث ق ($\angle$ أ ب م) > ق ($\angle$ أ جـ م)

أثبت أن : م جـ > م ب

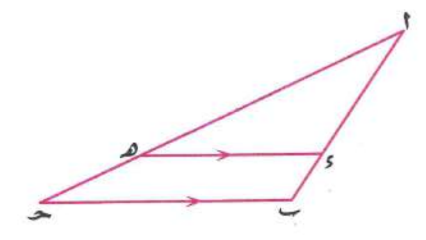


١٣ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث منفرج الزاوية في ب

، $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

برهن أن : أ هـ > أ ء

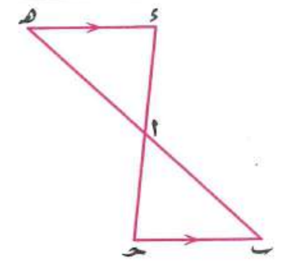


١٤ في الشكل المقابل :

أ ب > أ جـ ، $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

، $\overline{\text{ء جـ}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{\text{أ}\}$

أثبت أن : أ هـ > أ ء

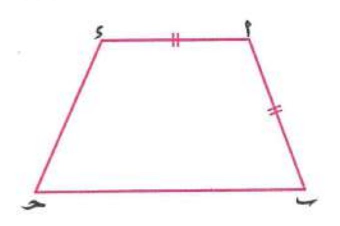


١٥ في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى ، أ ب = أ ء

، ق ($\angle$ ء) > ق ($\angle$ ب)

برهن أن : ب جـ > جـ ء





١٦ في الشكل المقابل :

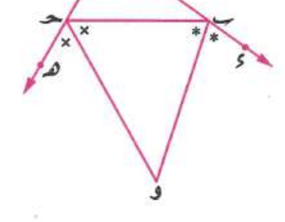
Δ أ ب جـ فيه : أ ب > أ جـ ، د ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

، $\overleftarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ د ب جـ ، $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ ينصف ∠ ب جـ هـ

، $\overleftarrow{\text{ب و}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ = {و}

برهن أن : ١ ق (∠ و ب جـ) > ق (∠ ب جـ و)

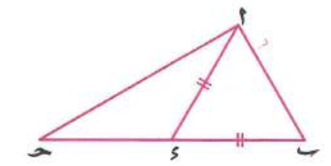
٢ جـ و > ب و



١٧ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب د = أ د

برهن أن : ب جـ > أ جـ

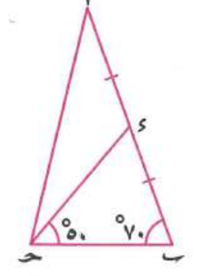


١٨ في الشكل المقابل :

د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ق (∠ ب) = 70° ، ق (∠ د جـ ب) = 50°

أثبت أن :

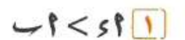
١ ق (∠ أ) > ق (∠ أ جـ د) ٢ ∠ أ جـ ب حادة.



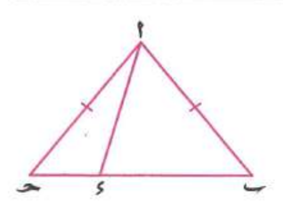
١٩ في الشكل المقابل :

أ و = ب و = د و ، ق (∠ و أ ب) = 50°

أثبت أن :


١ أ د > أ ب


٢ ب جـ > أ جـ



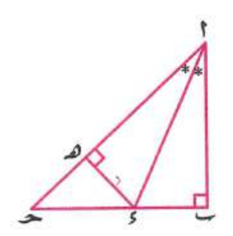
٢٠ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه :

أ ب = أ جـ ، د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن : أ ب > أ د

٢١ **في الشكل المقابل :**



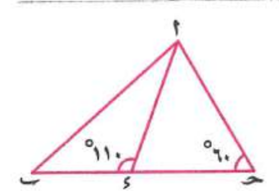
ق (∠ب) = ٩٠° ، ء هـ ⊥ أ حـ ، أ ء ينصف ∠ب أ هـ

أثبت أن :

[١] ب ء = ء هـ   [٢] ء حـ > ء ب

---

٢٢ **في الشكل المقابل :**



ق (∠أ ء ب) = ١١٠° ، ق (∠حـ) = ٦٠°

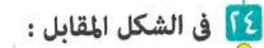
أثبت أن : أ ب + أ حـ > ٢ أ ء

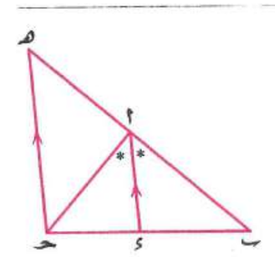
---

٢٣ 
أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

أثبت أن : أ ب + ب حـ < ٢ أ حـ

---

٢٤ 
في الشكل المقابل :



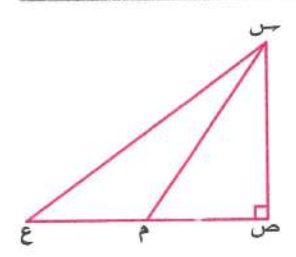
أ ب حـ مثلث ، أ ء ينصف ∠ب أ حـ

، حـ هـ // ء أ ويقطع ب أ في هـ

أثبت أن : ب هـ > ب حـ

---

٢٥ 
في الشكل المقابل :



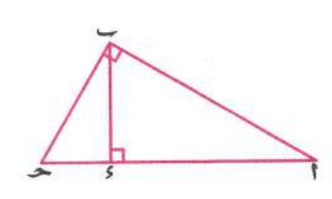
س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص

، م ∈ ص ع

أثبت أن : س ع > س م

---

٢٦ **في الشكل المقابل :**



ق (∠أ ب حـ) = ٩٠° ، ب ء ⊥ أ حـ

، أ ب > ب حـ

أثبت أن : أ ء > ب ء



٢٧ ا ب حـ مثلث ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ حـ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}} \cap \overline{\text{ا ب}} = \{\text{ء}\}$

برهن أن : ب حـ > ب ء

---

٢٨ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ $\overline{\text{ا حـ}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث ا ء = ب هـ

أثبت أن : ق (∠ حـ هـ ء) > ق (∠ حـ ء هـ)

---

٢٩ Δ ا ب حـ فيه : ق (∠ ا) = (٥ س + ٢)° ، ق (∠ ب) = (٦ س − ١٠)°

، ق (∠ حـ) = (س + ٢٠)° **رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعديًا.**

للمتفوقين

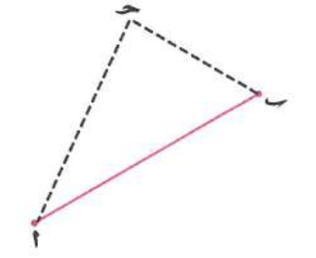
٣٠ ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ا حـ ، س ∈ $\overline{\text{ا حـ}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ يقطع $\overline{\text{ا ب}}$ فى ص

ويقطع $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ فى ع **برهن أن :** ا ص > ا س

الدرس 4 متباينة المثلث

نعلم أن أصغر مسافة بين نقطتين هى طول القطعة المستقيمة المرسومة بين هاتين النقطتين.

فمثلًا فى الشكل المقابل :



أصغر مسافة بين نقطة ا ، ونقطة ب هى طول

القطعة المستقيمة $\overline{\text{ا ب}}$

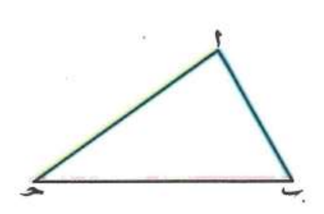
فإذا كانت نقطة حـ ∌ $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$

فإن : ا ب < ا حـ + حـ ب

وبصفة عامة

فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث.

* **أى أنه :** فى أى مثلث ا ب حـ



يكون : ا ب + ب حـ > ا حـ

، ب حـ + حـ ا > ا ب

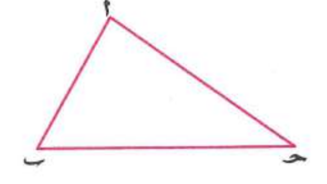
، حـ ا + ا ب > ب حـ

نتيجــة

طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما.

ويمكن إثبات ذلك كما يلى :

فى الشكل المقابل أ ب حـ مثلث



ومن متباينة المثلث يكون :

أ حـ + أ ب > ب حـ (١)

، ∵ أ ب + ب حـ > أ حـ

أى أن : ب حـ > أ حـ − أ ب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : **أ حـ − أ ب < ب حـ < أ حـ + أ ب**

ملاحظة

لتحديد ما إذا كانت ثلاثة أطوال تصلح لأن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث نتبع الآتى :

نقارن بين الطول الأكبر ، ومجموع الطولين الآخرين :

- إذا كان الطول الأكبر أكبر من أو يساوى مجموع الطولين الآخرين

  فإن هذه الأطوال الثلاثة **لا تصلح** أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

  وفى هذه الحالة لا يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه هى الأطوال الثلاثة المعطاة.

- إذا كان الطول الأكبر أصغر من مجموع الطولين الآخرين

  فإن هذه الأطوال الثلاثة **تصلح** أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

  وفى هذه الحالة يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه هى الأطوال الثلاثة المعطاة.

مثال ١

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يلى مع ذكر السبب ؟

١ ٥ سم ، ٧ سم ، ١٢ سم

٢ ٤ سم ، ٦ سم ، ١١ سم

٣ ١٤ سم ، ٩ سم ، ٧ سم

٤ ٨ سم ، ١٨ سم ، ٨ سم

الحــل

١ ∵ ٥ + ٧ = ١٢ ∴ لا يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ٥ سم ، ٧ سم ، ١٢ سم

٢ ∵ ٤ + ٦ < ١١ ∴ لا يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ٤ سم ، ٦ سم ، ١١ سم

٣ ∵ ٩ + ٧ > ١٤ ∴ يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ١٤ سم ، ٩ سم ، ٧ سم

٤ ∵ ٨ + ٨ < ١٨ ∴ لا يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ٨ سم ، ١٨ سم ، ٨ سم

مثال ٢

أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

١ ٤ سم ، ٣ سم

٢ ٤,٥ سم ، ٧,٥ سم

٣ ٢ $\sqrt{٥}$ سم ، ٢ $\sqrt{٥}$ سم

الحــل

∵ طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما

وبفرض أن طول الضلع الثالث = ل سم فإن :

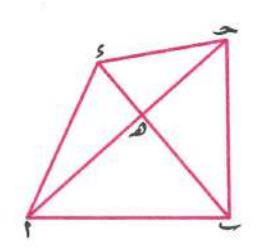
١ ٤ − ٣ < ل < ٤ + ٣ ∴ ١ < ل < ٧ ∴ ل ∈]١ ، ٧[

٢ ٧,٥ − ٤,٥ < ل < ٧,٥ + ٤,٥ ∴ ٣ < ل < ١٢ ∴ ل ∈]٣ ، ١٢[

٣ ٢ $\sqrt{٥}$ − ٢ $\sqrt{٥}$ < ل < ٢ $\sqrt{٥}$ + ٢ $\sqrt{٥}$ ∴ صفر < ل < ٤ $\sqrt{٥}$

∴ ل ∈]صفر ، ٤ $\sqrt{٥}$[

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى **هـ**

أثبت أن : أ حـ + ب ء > ب حـ + أ ء

الحـــل

المعطيات	أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ
المطلوب	إثبات أن : أ حـ + ب ء > ب حـ + أ ء
البرهان	فى Δ هـ ب حـ : هـ حـ + هـ ب > ب حـ (متباينة المثلث) (١)
	، فى Δ هـ أ ء : هـ أ + هـ ء > أ ء (متباينة المثلث) (٢)
	وبجمع (١) ، (٢) :
	∴ هـ حـ + هـ أ + هـ ب + هـ ء > ب حـ + أ ء
	، ∵ هـ حـ + هـ أ = أ حـ ، ∵ هـ ب + هـ ء = ب ء
	∴ أ حـ + ب ء > ب حـ + أ ء (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

١ ضع علامة (✓) فى المكان الخالى أمام كل مجموعة أطوال تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث :

١ ٢ سم ، ٣ سم ، ٤ سم ☐

٢ ٣ سم ، ٦ سم ، ٢ سم ☐

٣ ١٠ سم ، ٣ سم ، ٧ سم ☐

٤ ١٢ سم ، ٥ سم ، ٧,٥ سم ☐

---

٢ أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث فى كل من المثلثين الآتيين

إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

١ ٦ سم ، ٥ سم

٢ ٧,٥ سم ، ٧,٥ سم

تماريـن 9

على متباينة المثلث



اختبـــار تفاعلى

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يلى مع ذكر السبب :

١ ٣ سم ، ٤ سم ، ٩ سم

٢ 📖 ٥ سم ، ٧ سم ، ٨ سم

٣ 📖 ١٠ سم ، ٦ سم ، ٤ سم

٤ ١٣ سم ، ٨ سم ، ٦ سم

٥ ٥ سم ، ٣ سم ، ٤ سم

٦ ٩ سم ، ٩ سم ، ١٩ سم

---

٢ أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

١ 📖 ٦ سم ، ٩ سم

٢ ٣ سم ، ٣ سم

٣ 📖 ٢,٩ سم ، ٣,٢ سم

٤ ٥,٧ سم ، ٧,٣ سم

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أصغر من (ب) أكبر من (جـ) يساوى (د) نصف

٢ طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين.

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ضعف

٣ أى من الأعداد الآتية لا تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث ؟

(أ) ٧ ، ٧ ، ٥ (ب) ٩ ، ٩ ، ٩

(جـ) ٣ ، ٦ ، ١٢ (د) ٣ ، ٤ ، ٥

٤ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٧ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يكون ....

(أ) ١ سم (ب) ٢ سم (جـ) ٣ سم (د) ٤ سم

٥ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣ سم ، ٧ سم فإن طول الضلع الثالث يساوى ....

(أ) ٧ سم (ب) ٣ سم (جـ) ٤ سم (د) ١٠ سم

٦ مثلث له محور تماثل واحد ، طولا ضلعين فيه ٤ سم ، ٨ سم فإن محيطه = ...

(أ) ١٦ سم　(ب) ٢٠ سم　(جـ) ٢٤ سم　(د) ٣٠ سم

٧ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = س سم

فإن : س ∈ ....

(أ) [٣ ، ٥]　(ب) [٢ ، ٥]　(جـ) [٥ ، ٨]　(د) [٢ ، ٨]

٨ إذا كان ٥ سم ، ١٠ سم طولى ضلعين فى مثلث فإن طول الضلع الثالث ∈ ....

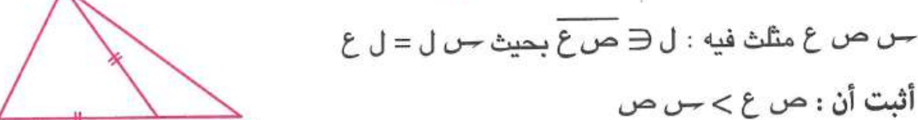
(أ)]٥ ، ١٥]　(ب) [٥ ، ١٥]　(جـ) [٥ ، ١٥[　(د)]٥ ، ١٥[

٩ فى Δ أ ب حـ يكون : أ ب + ب حـ − أ حـ ....

(أ) > صفر　(ب) < صفر　(جـ) = صفر　(د) = محيط Δ أ ب حـ

١٠ فى Δ أ ب حـ يكون : (أ ب + ب حـ) / أ حـ ١

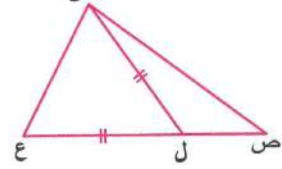
(أ) >　(ب) <　(جـ) =　(د) ≤



٤ فى الشكل المقابل :

س ص ع مثلث فيه : ل ∈ ص ع بحيث س ل = ل ع

أثبت أن : ص ع > س ص



٥ أ ب حـ مثلث فيه ب حـ أكبر الأضلاع طولاً ، ء ∈ ب حـ بحيث حـ ء = حـ أ

أثبت أن : أ ب > ب ء

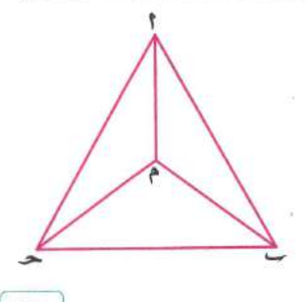
٦ أ ب حـ مثلث ، رسم أ ء يقطع ب حـ فى ء أثبت أن : ب ء + ء حـ + ٢ أ ء > أ ب + أ حـ

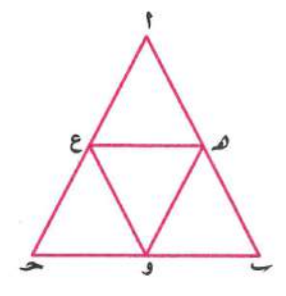


٧ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، م نقطة داخله

أثبت أن : م أ + م ب + م حـ > $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب حـ



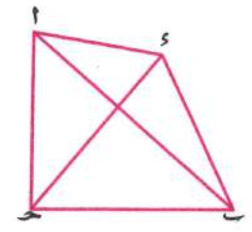


٨ **فى الشكل المقابل :**

أ ب ح مثلث فيه :

هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، و ∈ $\overline{\text{ب ح}}$ ، ع ∈ $\overline{\text{أ ح}}$

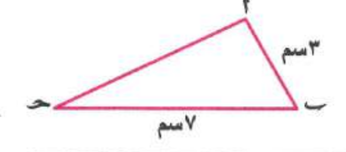
أثبت أن : محيط Δ أ ب ح > محيط Δ هـ و ع



٩ **فى الشكل المقابل :**

أ ب ح مثلث ، ء نقطة خارجه

أثبت أن : محيط Δ أ ب ح < ٢ (ء أ + ء ب + ء ح)

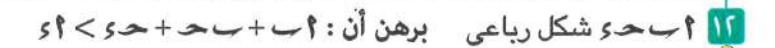


١٠ **فى الشكل المقابل :**

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٧ سم

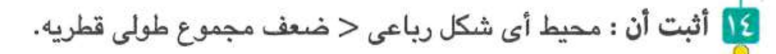
أثبت أن : ق (∠ ح) < ق (∠ ب)

١١ **برهن أن :** طول أى ضلع فى مثلث أصغر من نصف محيط المثلث.



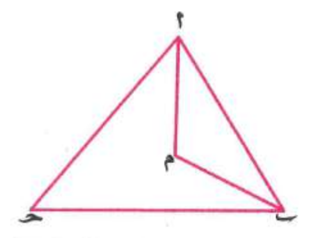
١٢ أ ب ح ء شكل رباعى **برهن أن :** أ ب + ب ح + ح ء > أ ء

١٣ **برهن أن :** مجموع طولى قطرى أى شكل رباعى محدب أصغر من محيط الشكل.



١٤ **أثبت أن :** محيط أى شكل رباعى < ضعف مجموع طولى قطريه.

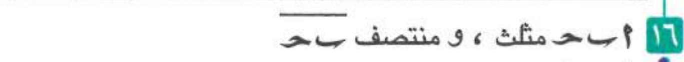
للمتفوقين



١٥ **فى الشكل المقابل :**

م نقطة داخل المثلث أ ب ح

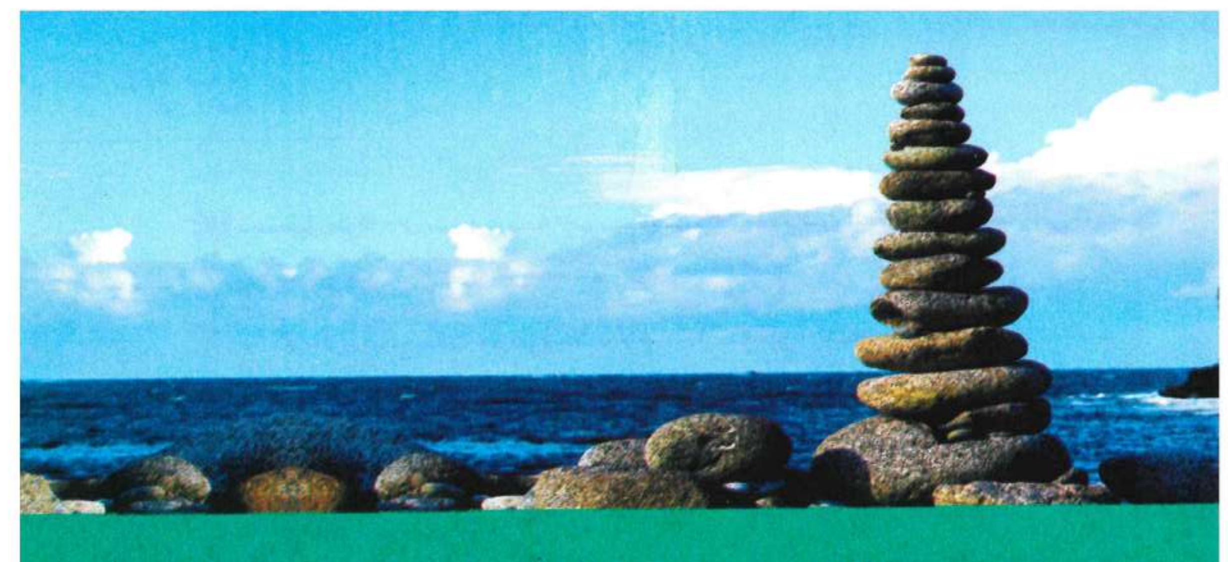
أثبت أن : أ م + م ب < أ ح + ب ح



١٦ أ ب ح مثلث ، و منتصف $\overline{\text{ب ح}}$



أثبت أن : [١] أ ب + أ ح > ٢ أ و [٢] أ ب + أ ح > أ و + ب و



مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

١ أكمل ما يأتى :

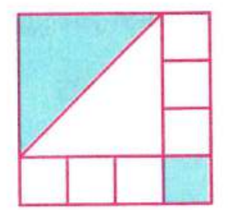
١ عمود إنارة ارتفاعه ٤,٥ متر يبعد مسافة ٢ متر عن مبنى ارتفاعه ١٠,٥ متر فإن بعد رأس العمود عن أعلى نقطة بالمبنى يساوى .... م

٢ النسبة بين المساحة الجانبية والكلية للمكعب تساوى ....

٣ متوازى مستطيلات مساحته الجانبية ٢٠٠ سم^2 وبعدا قاعدته ٨ سم ، ١٢ سم فإن ارتفاعه يساوى .... سم

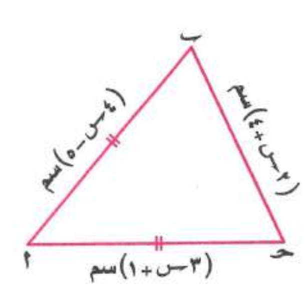
٤ قياس الزاوية بالدرجات بين عقربى الساعة عند الساعة السابعة يساوى ....°

٥ فى الشكل المقابل :



مربع كبير مقسم إلى ٧ مربعات صغيرة متطابقة ومثلثين متطابقين. إذا كانت مساحة المربع المظلل = ٤ سم^2 فإن مساحة المثلث المظلل تساوى .... سم^2

٦ فى الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = (٤ س - ٥) سم

، ب حـ = (٢ س + ٤) سم ، ا حـ = (٣ س + ١) سم

، ا ب = ا حـ

فإن محيط Δ ا ب حـ = ... سم

٧ مستطيل طوله س سم وعرضه ص سم ومحيطه ح سم فإن العلاقة الرياضية التى تربط بين س ، ص ، ح هى س = ...

٨ إذا كان طول ضلع مثلث متساوى الأضلاع = ١٠ سم فإن ارتفاعه يساوى .... سم

٩ قياس زاوية الخماسى المنتظم يساوى ....°

١٠ الشكل المقابل يشير إلى مستطيل مظلل داخل متوازى أضلاع.
فإن مساحة المستطيل المظلل تساوى سم٢

٦سم
٤٥°
١٦سم

١١ فى الشكل المقابل :
إذا كان محيط المربع أ ب حـ ء = ٢٤ سم
فإن مساحة المربع س ص ع ب تساوى سم٢

ء أ
ص س
حـ ب ع

١٢ متوازى مستطيلات مساحته الكلية ١٤٨ سم٢ ومساحته الجانبية = ١١٠ سم٢
فإن مساحة قاعدته تساوى سم٢

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزاوية الحادة تكملها زاوية ....
(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) منعكسة.

٢ عدد أقطار الشكل السداسى يساوى ....
(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٣ عدد محاور تماثل الشكل المقابل هو ....
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ سلك على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ سم أُعيد تشكيله ليصبح مربعًا

فإن طول ضلع المربع يساوى .... سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٣

٥ فى الشكل المقابل :

دائرة طول نصف قطرها ٢ سم تمس ضلعين من أضلاع مربع

فإن مساحة الجزء المظلل من الشكل تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٤ − π (ب) π − ٢ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) ٢ π

٦ نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم إلى مساحة منطقة مربعة أخرى طول

ضلعها ٢ ل سم كنسبة ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ل : ٤ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٧ على خريطة مرسومة كل ١ سم يمثل ٥ كم ، فإذا كان البعد بين موقعين $\frac{١}{٢}$ كم

فإن البعد بينهما على هذه الخريطة يساوى ....

(أ) ٠,١ سم (ب) ١٠ سم (جـ) ٢,٥ سم (د) ٠,٤ سم

٨ إذا كانت مساحة قاعدة متوازى مستطيلات ١٢ سم^{٢} ومساحتا وجهين جانبيين فيه ٦ سم^{٢}

، ٨ سم^{٢} فإن حجمه يساوى .... سم^{٣}

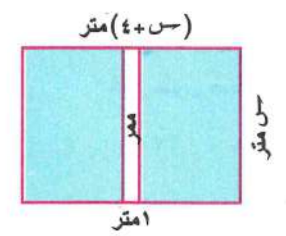
(أ) ٩ (ب) ٥٧٦ (جـ) ٢٤ (د) ٣٢

٩ سيُدار هذا المجسم إلى وضع مختلف أى من الآتى

يمكن أن يكون وضع المجسم بعد إدارته ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

١٠ **في الشكل المقابل :**



حديقة مستطيلة الشكل بها ممر مستطيل عرضه متر

أى صيغة تبين مساحة الجزء المظلل

من الحديقة بالمتر المربع ؟

(أ) س^{٢} + ٣ س　　　(ب) س^{٢} + ٤ س

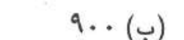
(جـ) س^{٢} + ٤ س − ١　　　(د) س^{٢} + ٣ س − ١

١١ الشكل المقابل يمثل ربع دائرة طول نصف قطرها ٢ سم

فإن محيط الشكل بالسنتيمترات يساوى ....

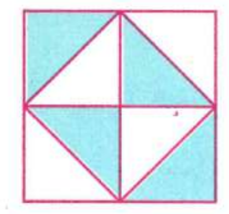
(أ) ٢ π　　　(ب) ٥ π　　　(جـ) π + ٤　　　(د) ٤ π + ٤

١٢ مساحة مربع طول ضلعه عدد صحيح يمكن أن تكون .... سم^{٢}

(أ) ٦٠٠　　　(ب) ٩٠٠　　　(جـ) ٨٠٠　　　(د) ٧٠٠



١٣ **في الشكل المقابل :**



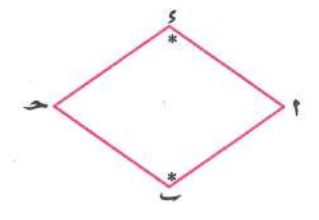
مربع محيطه ٣٢ سم مقسم إلى ٨ مثلثات متطابقة

فإن مساحة المنطقة المظللة تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٤　　　(ب) ٨

(جـ) ١٦　　　(د) ٣٢

١٤ **في الشكل المقابل :**



إذا كان : ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٤٠°

، ق (∠ ب) = ق (∠ ء)

فإن : ق (∠ ب) = ...

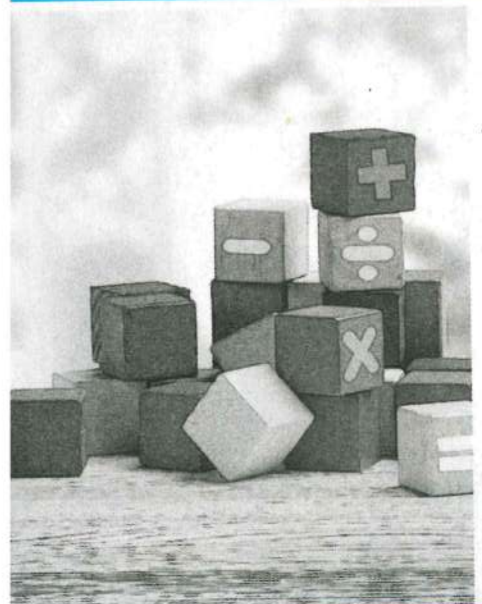
(أ) ٥٠°　　　(ب) ٥٥°　　　(جـ) ١١٠°　　　(د) ٢٢٠°



2025
المعاصر
إعداد نخبة من خبراء التعليم
الجزء الخاص
بالتقويم المستمر
اختبارات تراكمية
اختبارات شهرية
الأسئلة الهامة
امتحانات نهائية
الصف
الثانى
الإعدادى
الفصل الدراسى الأول
الرياضيات

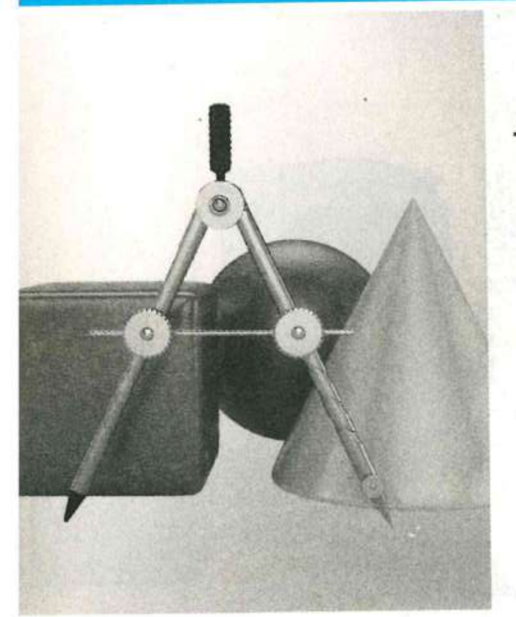
محتويات الكتاب

أولًا الجبـــر والإحصاء



- الاختبارات التراكمية (عدد ١٨ اختبارًا).
- الاختبارات الشهرية (عدد ٢ نموذج على كل شهر).
- الأسئلة الهامة فى الجبر والإحصاء.
- الامتحانات النهائية :
  - نماذج امتحانات الكتاب المدرسى (عدد ٢ نموذج + نموذج للطلاب المدمجين)
  - امتحانات بعض مدارس المحافظات (عدد ١٢ امتحانًا)

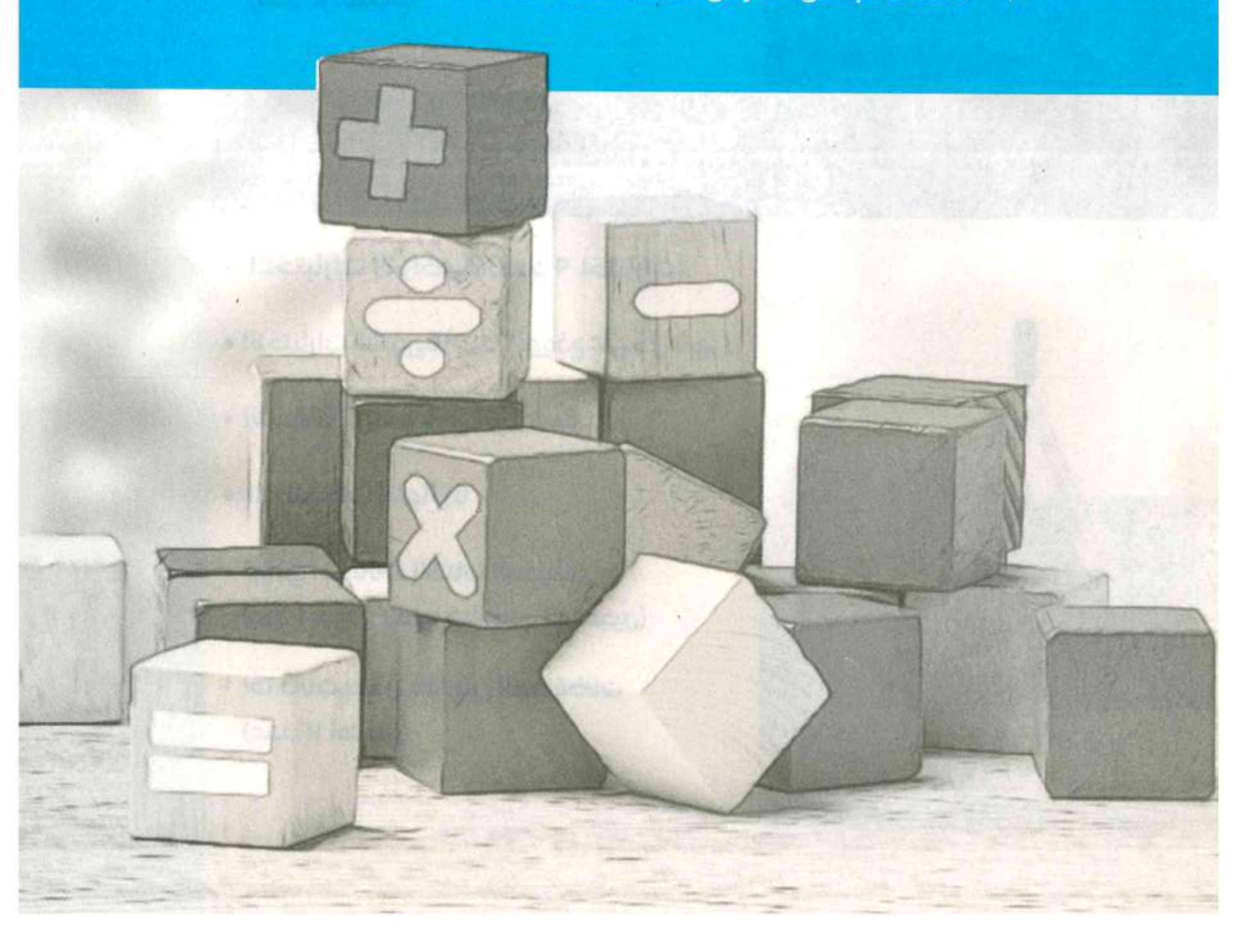
ثانيًا الهندســـة



- الاختبارات التراكمية (عدد ٩ اختبارات).
- الاختبارات الشهرية (عدد ٢ نموذج على كل شهر).
- الأسئلة الهامة فى الهندسة.
- الامتحانات النهائية :
  - نماذج امتحانات الكتاب المدرسى (عدد ٢ نموذج + نموذج للطلاب المدمجين)
  - امتحانات بعض مدارس المحافظات (عدد ١٢ امتحانًا)

أولاً

الجبر والإحصاء



الاختبارات التراكمية

فى الجبر والإحصاء

من امتحانات الإدارات التعليمية



اختبار تراكمى ١ على الدرس الأول الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt[3]{\frac{١٠}{٢٧}٢}$ = ... (شبرا الخيمة - القليوبية - ١٩)

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{١٠}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٢٠}{٢٧}$

[٢] $\sqrt[3]{..........}$ + $\sqrt[3]{٢٧}$ = $\sqrt{٦٤}$ (ساقلته - سوهاج - ١٧)

(أ) ٢٥ (ب) ‎-١٢٥ (جـ) ١٢٥ (د) ٥

[٣] إذا كان : $\sqrt[3]{س} = \frac{١}{٤}$ فإن : س = ... (يوسف الصديق - الفيوم - ١٩)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{١٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦٤}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

[٤] $\sqrt[3]{س^٦}$ = $\sqrt{..........}$ (كفر شكر - القليوبية - ١٧)

(أ) س (ب) $س^٢$ (جـ) $س^٣$ (د) $س^٤$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] $\sqrt[3]{..........}$ = ‎- $\sqrt{٤}$ (غرب القاهرة - القاهرة - ٢٣)

[٢] $\sqrt[3]{١٢٥}$ ‎- $\sqrt{٢٥}$ = ... (أبوكبير - الشرقية - ٢٣)

[٣] إذا كان : $\sqrt[3]{س}$ = ٣ فإن : $\sqrt{س - ٢}$ = ... (الدلنجات - البحيرة - ٢٢)

[٤] مكعب حجمه ٨ $سم^٣$ يكون طول حرفه = ... سم (باب الشعرية - القاهرة - ٢٣)

---

٣ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين فى ن :

[١] $س^٣$ + ١ = صفر (سوهاج - سوهاج - ١٩)

[٢] ٨ $س^٣$ + ٧ = ٨ (سيدى سالم - كفر الشيخ - ١٩)

اختبـار تراكمـى ٢ حتى الدرس الثانى الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{٦} \in$ .... (المنشأة - سوهاج - مجمع ٢١)

(أ) ط (ب) ن (جـ) نَ (د) ص

[٢] العدد غير النسبى المحصور بين ٢ ، ٣ هو .... (بورفؤاد - بورسعيد - مجمع ٢١)

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) $\sqrt{١٠}$ (جـ) ٢,٥ (د) $\sqrt{٣}$

[٣] أقرب عدد صحيح للعدد : $\sqrt[٣]{-٢٨}$ هو .... (فرشوط - قنا - ١٩)

(أ) −٤ (ب) −٣٠ (جـ) −٣ (د) ٣

[٤] إذا كانت : س = $\sqrt{٢}$ ، ص = ٢ فأى مما يلى لا يمثل عددًا نسبيًا ؟

(عين شمس - القاهرة - ٢٠)

(أ) $س^{٢}$ + ص (ب) س + $ص^{٢}$ (جـ) $\sqrt{س^{٢} ص}$ (د) $\sqrt{٢}$ س ص

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] $\sqrt{٤} - \sqrt[٣]{-٨}$ = ... (تمى الأمديد - الدقهلية - ٢٣)

[٢] إذا كان : س < $\sqrt{٧}$ < س + ١ ، س $\in$ ص

فإن : س = ... (منوف - المنوفية - ٢٣)

[٣] مكعب حجمه ١٢٥ $سم^{٣}$ تكون مساحة أحد أوجهه .... (المرج - القاهرة - ٢٢)

[٤] مجموع الجذرين التربيعيين للعدد $\frac{٢٥}{١٦}$ يساوى .... (غرب الزقازيق - الشرقية - ٢٣)

---

٣ (أ) أثبت أن : $\sqrt{٥}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣ (السنطة - الغربية - ١٧)

(ب) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\sqrt[٣]{١٥}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥

(برج العرب - الإسكندرية - ١٧)

اختبار تراكمى ٣ حتى الدرس الثالث الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $ح_+ \cup ح_- =$ .... (القنطرة غرب - الإسماعيلية - ٢٠)

(أ) $ح_+$ (ب) $ح_-$ (جـ) $ح^*$ (د) $ح$

[٢] العدد غير النسبى الذى يقع بين العددين ٤ ، ٥ هو .... (الدقى - الجيزة - ١٧)

(أ) $\sqrt{٨}$ (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) $٣\sqrt{٢}$ (د) $\sqrt{١٠}$

[٣] $\sqrt[٣]{٩}$ .... $\sqrt{٤}$ (إدفو - أسوان - ١٨)

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\geq$

[٤] أى من الأعداد النسبية الآتية يقع بين $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ؟ (سيدى سالم - كفر الشيخ - ١٩)

(أ) $\frac{٢}{١٠}$ (ب) $\frac{١}{١٠}$ (جـ) ٠,٣ (د) −٠,٣

[٥] إذا كان : $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{أ}{\sqrt{٥}}$ عددين حقيقيين يقعان بين صفر ، ١

فإن : أ يمكن أن تساوى .... (المعصرة - القاهرة - ١٩)

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٥}$ (د) ٢

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] ن $\cap$ نَ = ... (دار السلام - سوهاج - ٢٣)

[٢] مجموعة الحل فى $ح$ للمعادلة $س^٢ + ٤ =$ صفر هى .... (كوم إمبو - أسوان - ٢٣)

[٣] $\sqrt{٤} - \sqrt[٣]{-٨} =$ .... (المرج - القاهرة - ٢٢)

[٤] $ح^- \cap ح^+ =$ .... (غرب شبرا الخيمة - القليوبية - ٢٣)

[٥] مجموعة حل المعادلة $س^٣ - ٨ =$ صفر فى $ح$ هى .... (وادى النطرون - البحيرة - ٢٣)

اختبــار تراكمـى ٤ حتى الدرس الرابع الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] {المحايد الضربى ، ٣} .... [٠ ، ٣] (شرق الزقازيق - الشرقية ١٦)

(أ) $\ni$ (ب) $\not\ni$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

[٢] ح = ... (مصر الجديدة - القاهرة ١٧)

(أ) $ح_+ \cup ح_-$ (ب) $]-\infty ، \infty[$ (جـ) $]-\infty ، ٠]$ (د) $]٠ ، \infty[$

[٣] إذا كان : $\sqrt{٤} - \sqrt[٣]{س} = ٥$ فإن : س = ... (ههيا - الشرقية ١٧)

(أ) ١٢٥ (ب) ٢٧ (جـ) -٢٧ (د) ٣

[٤] إذا كانت : س عددًا سالبًا فأى من الآتى عدد موجب ؟ (الإسماعيلية - الإسماعيلية ١٧)

(أ) $س^٣$ (ب) ٢ س (جـ) $س^٢$ (د) $\frac{س}{٢}$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] $[٣ ، ٥] -]٣ ، ٥[= ....$ (التحرير - البحيرة ٢٣)

[٢] $]١ ، \infty[\cup]-\infty ، ١[= ....$ (أبوكبير - الشرقية ٢٢)

[٣] مجموع الأعداد الحقيقية داخل الفترة [-٤ ، ٤] يساوى ....

(منية النصر - الدقهلية ٢٢)

[٤] ن $\cup$ نَ = ...

(دمياط ٢٣)

---

٣ إذا كانت : س = [٢ ، ٥] ، ص = [٠ ، ٣]

[١] اكتب س بطريقة الصفة المميزة.

[٢] مثل س ، ص على خط الأعداد.

[٣] أوجد س - ص فى صورة فترة على خط الأعداد. هل $\sqrt{٢٩} \in$ س - ص ؟

(الباجور - المنوفية ١٨)

---

٤ إذا كانت : س = [-١ ، ٤] ، ص = [٣ ، ∞[

أوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًا من : س $\cup$ ص ، س $\cap$ صَ ، ص - س

(دكرنس - الدقهلية ١٧)

اختبار تراكمى 5 حتى الدرس الخامس الوحدة الأولى

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] $\frac{٦}{\sqrt{٣}}$ = ... (سمسطا - بنى سويف - ٢٠)

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) $٦\sqrt{٣}$

[2] ن ∪ نَ = ... (بنى سويف - بنى سويف - ١٦)

(أ) صفر (ب) ص (جـ) ع (د) ∅

[3] المستطيل الذى بعداه $(\sqrt{٧} - ١)$ سم ، $(\sqrt{٧} + ١)$ سم مساحته هى .... سم^٢

(السويس - السويس - ١٩)

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) $٢\sqrt{٧}$

[4] إذا كان : س = $\sqrt{٢} + ٣$ ، ص = $\sqrt{٢} - ٣$ فإن : س^٢ − ص^٢ = ...

(تمى الأمديد - الدقهلية - مجمع ٢١)

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $١٢\sqrt{٢}$ (جـ) $٦\sqrt{٥}$ (د) $٣\sqrt{٦}$

---

2 أكمل ما يأتى :

[1] [−١ ، ٥] − {−١ ، ٥} = ... (سنورس - الفيوم - ٢٣)

[2] مكعب حجمه ٦٤ سم^٣ فإن مساحته الكلية = ... سم^٢ (دمنهور - البحيرة - ٢٣)

[3] المعكوس الضربى للعدد $\frac{٢\sqrt{٣}}{٥}$ يساوى $\frac{...............}{٦}$ (أشمون - المنوفية - ٢٣)

[4] إذا كانت : س = $\sqrt[٣]{٣} + ١$ ، ص = $\sqrt[٣]{٣} - ١$

فإن : (س + ص)^٣ = ... (سمنود - الغربية - ٢٢)

---

3 إذا كانت : ص = $\sqrt{٢ + \sqrt{٣}}$ فأوجد قيمة : ص^٤ − ٢ ص^٢ + ١ (سيدى سالم - كفر الشيخ - ١٩)

---

4 إذا كان : أ = ٥ − $\sqrt{٣}$ ، ب = ٥ + $\sqrt{٣}$ أوجد فى أبسط صورة موضحًا خطوات الحل :

[1] أ ب [2] أ^٢ + ب^٢ (الهرم - الجيزة - ١٦)

اختبـار تراكمى ٦ حتى الدرس السادس الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣٢}$ هو .... (المطرية - القاهرة - ١٨)

(أ) $٤\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٨}$ (جـ) $٢\sqrt{٥}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

[٢] العدد التالى فى النمط : $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ هو .... (كفر الدوار - البحيرة - ٢٠)

(أ) $\sqrt{٧٥}$ (ب) $\sqrt{٩٠}$ (جـ) $\sqrt{١١٢}$ (د) $\sqrt{١٢٥}$

[٣] $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} =$ .... (شرق المنصورة - الدقهلية - ١٨)

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

[٤] إذا كانت : س $= ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٧}$ ، ص $= ٢\sqrt{٢} + \sqrt{٧}$ فإن : س ص $- ١ =$ .... (المنيا - المنيا - مجمع ٢١)

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) −٤ (د) ٧

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] $]١ ، ٣[\cup [٢ ، ٥] =$ .... (البلينا - سوهاج - ٢٣)

[٢] مجموعة حل المعادلة س^{٢} + ٢٥ = ٠ فى ح هى .... (الزرقا - دمياط - ٢٣)

[٣] المعكوس الجمعى للعدد $٣ - \sqrt{٥}$ هو .... (كفر سعد - دمياط - ٢٣)

[٤] $\sqrt{١٨} - \sqrt{٥٠} + \sqrt{٢} =$ .... (بنى عبيد - الدقهلية - ٢٣)

---

٣ إذا كانت : أ =]− ∞ ، ٣] ، ب = [−٢ ، ٥] **أوجد مستعينًا بخط الأعداد :**

[١] أ ∩ ب [٢] ب − أ (فاقوس - الشرقية - ١٩)

---

٤ اختصر لأبسط صورة :

[١] $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤}$ (سمسطا - بنى سويف - ١٩)

[٢] $\sqrt{١٢٨} - \frac{١٤}{\sqrt{٢}} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}} - (\sqrt{٢})^{٥}$ (الدلنجات - البحيرة - ١٧)

اختبار تراكمى ٧ حتى الدرس السابع الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المعكوس الضربى للعدد $١ - \sqrt{٢}$ هو .... (السنبلاوين - الدقهلية - ٢٠)

(أ) $\sqrt{٢} - ١$ (ب) $١ - \sqrt{٢}$ (جـ) $-\sqrt{٢} - ١$ (د) $١ + \sqrt{٢}$

[٢] إذا كانت : $س = ٢ + \sqrt{٥}$ ، $ص = ٢ - \sqrt{٥}$ فإن : $(س - ص)^٢ =$ ....

(طوخ - القليوبية - ١٧)

(أ) $٢\sqrt{٨}$ (ب) ٢٠ (جـ) $٤\sqrt{٥}$ (د) -١

[٣] $\sqrt{١٦} - \sqrt[٣]{-٦٤} =$ .... (شبراخيت - البحيرة - ١٩)

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ٨ (د) -٨

[٤] العدد غير النسبى المحصور بين العددين ٣ ، ٦ هو .... (المطرية - القاهرة - ١٦)

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) $\sqrt{١٠}$ (جـ) $\sqrt{٢٥}$ (د) $\sqrt[٣]{٢٧}$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كانت : $س \in ح_-$ ، $س^٢ = ٥$ فإن : $(س + \sqrt{٥})^٢ =$ ....

(نجع حمادى - قنا - ٢٣)

[٢] المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ هو .... (إسنا - الأقصر - ٢٢)

[٣] $ح^* = ح_-$ .... (أوسيم - الجيزة - ٢٣)

[٤] $(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})(\sqrt{٧} + \sqrt{٥}) =$ .... (إسنا - الأقصر - ٢٢)

---

٣ (أ) إذا كانت : $س ص = ١$ ، $ص = ٢ + \sqrt{٣}$

فأوجد فى أبسط صورة القيمة العددية للمقدار : $س^٢ + \sqrt{٤٨}$ (ديرب نجم - الشرقية - ١٧)

(ب) **اختصر لأبسط صورة بدون استخدام حاسبة الجيب :**

$٢\sqrt{٥}(\sqrt{٥} - ٢) + \sqrt{٢٠} - ١٠\sqrt{\frac{١}{٥}}$ (المعصرة - القاهرة - ١٩)

---

٤ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} + ٢$ ، ص = المعكوس الضربى لـ س

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة : $\left(\frac{س - ص}{س + ص}\right)^٢$ (يوسف الصديق - الفيوم - ١٩)

اختبـار تراكمـى ٨ حتى الدرس الثامن الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt[3]{١٢٨} + \sqrt[3]{١٦} - ٢ \sqrt[3]{٥٤} =$ .... (سوهاج - سوهاج - ١٨)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

[٢] مجموعة حل المعادلة : $س^٣ = ٢٧$ فى ح هى .... (روض الفرج - القاهرة - ٢٠)

(أ) $\varnothing$ (ب) $\{٣\}$ (جـ) $\{-٣\}$ (د) {صفر}

[٣] $س = \sqrt[3]{٣} + ١$ ، $ص = \sqrt[3]{٣} - ١$ فإن : $س + ص =$ ....

(جنوب الجيزة - الجيزة - مجمع ٢١)

(أ) $٣ \sqrt[3]{٦}$ (ب) $٢ \sqrt[3]{٣}$ (جـ) ٣ (د) صفر

[٤] $\frac{٥}{٤} \sqrt[3]{٥} + \frac{٣}{٤} \sqrt[3]{٥} =$ .... (ديرب نجم - الشرقية - ١٧)

(أ) ٥ (ب) $\sqrt[3]{٢٠}$ (جـ) $\sqrt[3]{٥}$ (د) $\sqrt[3]{٤٠}$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كانت : $س = [٠ ، \infty[$ فإن : $سَ =$ .... (الدلنجات - البحيرة - ٢٢)

[٢] $\sqrt{٨} + \sqrt{٢} =$ .... (العامرية - الإسكندرية - ٢٣)

[٣] أبسط صورة للمقدار : $\sqrt[3]{١٦} + \sqrt[3]{٢} =$ .... (الشهداء - المنوفية - ٢٣)

[٤] $\sqrt[3]{٢٧} - \sqrt[3]{-٢٧} =$ .... (حوش عيسى - البحيرة - ٢٣)

---

٣ اختصر لأبسط صورة :

[١] $\sqrt[3]{٥٤} + ٤ \sqrt[3]{\frac{١}{٤}} - \sqrt[3]{-٢}$ (طوخ - القليوبية - ١٧)

[٢] $\sqrt[3]{٣٢} + ٤ \sqrt[3]{\frac{١}{٢}} - \left(٢ \sqrt[3]{-٢}\right)^٢ + \left(\sqrt{٢}\right)^{\text{صفر}} - \left(\frac{٢}{\sqrt{٢}}\right)^٢$ (زفتى - الغربية - ١٩)

---

٤ (أ) إذا كان : $س = [-٢ ، ٣]$ ، $ص =]-\infty ، ١]$ فأوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًا من :

[١] $س \cap ص$ [٢] $س - ص$ (بورسعيد - بورسعيد - ٢٠)

(ب) إذا كانت : $س = \frac{٦}{\sqrt{٢}}$ ، $ص = \frac{١}{\sqrt{٢} - ١}$ أوجد قيمة : $\left(ص - \frac{١}{٣} س\right)^٢$

(شبين الكوم - المنوفية - ١٧)

اختبـــار تراكمـى ٩ حتى الدرس التاسع الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] كرة حجمها $\frac{٤}{٣}$ π سم^٣ يكون طول نصف قطرها = ... سم (شرق الزقازيق - الشرقية - ١٦)

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\left(\frac{٤}{٣}\right)^{صفر}$ (د) π

[٢] مكعب حجمه ٥١٢ سم^٣ فإن محيط أحد أوجهه = ... سم (الوقف - قنا - ١٧)

(أ) ٨ (ب) ٦٤ (جـ) ٣٢ (د) ١٦

[٣] $\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٢}$ = ... (شبين الكوم - المنوفية - ١٩)

(أ) $\sqrt[٣]{١٦}$ (ب) $\sqrt[٣]{٨}$ (جـ) $\sqrt[٣]{٤}$ (د) $\sqrt[٣]{٢}$

[٤] كرة وأسطوانة متساويتان فى الحجم ومتساويتان فى طول نصف القطر فإن ارتفاع الأسطوانة = ... طول نصف قطر الكرة. (الباجور - المنوفية - ١٨)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كانت : س = $\sqrt{٥}$ − ٣ ، ص = $\sqrt{٥}$ + ٣ فإن : س ص = ... (أبشواى - الفيوم - ٢٢)

[٢] أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π سم^٣ وارتفاعها ١٠ سم فإن طول نصف قطر قاعدتها = ... (الزيتون - القاهرة - ٢٣)

[٣]]−٢ ، ٢] ∩ ط = ... (الباجور - المنوفية - ٢٢)

[٤] متوازى المستطيلات أبعاده $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$ سم فإن حجمه = ... سم^٣ (النزهة - القاهرة - ٢٣)

---

٣ (أ) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها وحجمها ٦٤ π سم^٣ أوجد ارتفاع الأسطوانة. (أسيوط - أسيوط - ١٧)

(ب) إذا كانت : س = $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، ص = $\sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

أثبت أن : س ، ص عددان مترافقان ثم أوجد قيمة : س ص (شبراخيت - البحيرة - ١٨)

---

٤ (أ) كرة حجمها ٣٦ π سم^٣ ، احسب مساحة سطحها بدلالة π (المعصرة - القاهرة - ١٩)

(ب) اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{١٢٥} - \sqrt[٣]{٢٥٠} + \frac{١}{٢}\sqrt[٣]{١٦} + \sqrt{٢٠}$ (غرب شبرا الخيمة - القليوبية - ١٩)

اختبــار تراكمى ١٠ حتى الدرس العاشر الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] مجموعة حل المعادلة : س + ٥ = | – ٥ | فى ط هى .... (بورسعيد - بورسعيد - ٢٠)

(أ) $\varnothing$ (ب) {٠} (جـ) {١٠} (د) {–١٠}

[٢] مجموعة حل المعادلة : $\sqrt[3]{\text{س}}$ – ١ = ٢ فى ح هى .... (كفر الدوار - البحيرة - ٢٠)

(أ) {٢ $\sqrt{3}$} (ب) {$\sqrt{3}$} (جـ) {٢} (د) {٢ $\sqrt{2}$}

[٣] إذا كان ثلاثة أرباع حجم كرة يساوى ٨ π سم^3 فإن طول نصف قطرها يساوى .... سم (الحامول - كفر الشيخ - ١٨)

(أ) ٦٤ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

[٤] العدد غير النسبى المحصور بين ٢ ، ٣ هو .... (المرج - القاهرة - ١٧)

(أ) ٢ $\frac{1}{2}$ (ب) $\sqrt{10}$ (جـ) $\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{3}$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] مجموعة حل المتباينة : – س ≥ ٢ فى ح هى .... (العياط - الجيزة - ٢٣)

[٢] مجموعة حل المتباينة : ٣ س – ٢ > ١ فى ح هى .... (الخصوص - القليوبية - ٢٣)

[٣] مجموعة حل المعادلة (س^2 + ٣) (س^3 + ١) = ٠ فى ح هى ....

(غرب المحلة الكبرى - الغربية - ٢٣)

[٤] إذا كانت [٣ ، ٨] هى مجموعة حل المتباينة أ ≥ س + ٢ ≥ ب

فإن : أ + ب = ... (شربين - الدقهلية - ٢٣)

---

٣ (أ) كرة حجمها $\frac{99000}{7}$ سم^3 احسب طول نصف قطرها ($\pi = \frac{22}{7}$) (الدلنجات - البحيرة - ١٧)

(ب) أوجد على صورة فترة مجموعة حل المتباينة : –٣ ≥ ٢ س + ١ > ٧ فى ح ، ومثل الحل على خط الأعداد. (إدفو - أسوان - ١٨)

---

٤ (أ) إذا كانت : س = [–١ ، ٤[، ص = [٢ ، ٦] فأوجد باستخدام خط الأعداد :

[١] س ∪ ص [٢] س ∩ ص (تلا - المنوفية - ٢٠)

(ب) أوجد فى ح على صورة فترة مجموعة حل المتباينة :

س – ١ > ٣ – س ≥ س + ٥ ومثل الحل على خط الأعداد. (٦ أكتوبر - الجيزة - ١٩)

اختبـار تراكمـى 11 حتى الدرس الأول الوحدة الثانية

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] العلاقة : ٢ س + ص = ٦ تقطع محور الصادات فى النقطة .... (الهرم - الجيزة - ١٦)

(أ) (٠ ، -٦) (ب) (٠ ، ٦) (جـ) (٦ ، ٠) (د) (٣ ، ٠)

[2] العلاقة : ٢ س = ٣ ص يمثلها مستقيم يمر بالنقطة .... (المنيا - المنيا - ١٨)

(أ) (٢ ، ٣) (ب) $(٠ ، \frac{٣}{٢})$ (جـ) (٠ ، ٠) (د) $(\frac{٢}{٣} ، ٠)$

[3] مجموعة حل المعادلة : س + ٩ = | -٥ | فى ح هى .... (السويس - السويس - ١٩)

(أ) {٠} (ب) ∅ (جـ) {-٤} (د) {٤}

[4] إذا كانت النقطة (٣ ك ، ٢ ك) تقع على المستقيم : س - ٣ ص = ٩

فإن : ك = ... (المعصرة - القاهرة - ١٩)

(أ) -٣ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) ٢

---

2 أكمل ما يأتى :

[1] $(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})(\sqrt{٨} - \sqrt{٢})$ = ... (أبوقرقاص - المنيا - ٢٣)

[2] إذا كان : (٣ ، ٦) يحقق العلاقة ٢ س + ص = أ فإن : أ = ... (بنى سويف - ٢٣)

[3] س = ٤ يمثلها بيانيًا مستقيم يوازى محور .... (أوسيم - الجيزة - ٢٣)

[4] إذا كان حجم كرة = $\frac{٩}{٢}$ π سم^{٣} فإن طول قطرها = ... سم. (طلخا - الدقهلية - ٢٣)

---

3 (أ) **أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص + ٢ س = ٥** (قلين - كفر الشيخ - ٢٠)

(ب) **بدون استخدام الآلة الحاسبة اختصر لأبسط صورة موضحًا خطوات الحل :**

$\sqrt{١٢} + \sqrt[٣]{٥٤} + ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} - ٦\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$ (الباجور - المنوفية - ١٨)

---

4 (أ) **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : -٢ س + ٥ ≥ ٥ س - ٤**

ومثل الحل على خط الأعداد. (ديرب نجم - الشرقية - ١٧)

(ب) **مثل بيانيًا العلاقة : س - ٤ ص = ٤ وإذا كان المستقيم يقطع محور السينات فى أ**

ومحور الصادات فى ب **أوجد :** مساحة Δ أ ب و حيث و نقطة الأصل.

(٦ أكتوبر - الجيزة - ١٩)

اختبــار تراكمــى ١٢ حتى الدرس الثانى الوحدة الثانية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] أى من الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة : ص = -س - ٣ ؟ (مصر الجديدة - القاهرة - ١٧)

(أ) (١ ، -٤) (ب) (-٢ ، -٥) (جـ) (١ ، -٢) (د) (٣ ، ٠)

[٢] $\sqrt{١٦} - \sqrt[٣]{-٦٤}$ = ... (شبراخيت - البحيرة - ١٩)

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ٨ (د) -٨

[٣] ميل المستقيم الرأسى هو .... (طما - سوهاج - مجمع ٢١)

(أ) صفر. (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير معرف.

[٤] إذا كان ميل المستقيم الذى يمثل العلاقة : س + م ص = ٥ غير معرف فإن : م = ... (ديرب نجم - الشرقية - ١٧)

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٥ (د) صفر

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] مكعب حجمه ٢٧ سم^{٣} فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢} (سوهاج - سوهاج - ٢٣)

[٢] ميل المستقيم العمودى على محور الصادات = ... (أبوقرقاص - المنيا - ٢٣)

[٣] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ك) ، (٤ ، ٥) يوازى محور السينات فإن : ك = ... (دمنهور - البحيرة - ٢٣)

[٤] الخط المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، -٥) ، (٥ ، ٥) يوازى محور .... (الدلنجات - البحيرة - ٢٢)

---

٣ (أ) مثل العلاقة الآتية بيانيًا ثم أوجد ميل الخط المستقيم الممثل للعلاقة : س + ص = ٧ (المطرية - القاهرة - ١٨)

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ≥ ٥ س + ٣ ≥ ٢ س + ٩ ومثل الحل على خط الأعداد. (شرق - الإسكندرية - ١٩)

---

٤ (أ) أثبت أن النقط : أ (٢ ، -٣) ، ب (٤ ، -٥) ، جـ (٠ ، -١) تقع على استقامة واحدة. (الدلنجات - البحيرة - ١٧)

(ب) اختصر لأبسط صورة : $٥\sqrt{٨} + ٤\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}} - ٢\sqrt{٥٠} - \sqrt[٣]{١٦}$ (العريش - شمال سيناء - ١٦)

اختبـــار تراكمـى ١٣ حتى الدرس الثالث الوحدة الثانية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان فى ١٠٠ جرام من الأطعمة يوجد ٣٠٠ سعر حرارى فإن عدد السعرات الحرارية الموجودة فى ٣٠ جرامًا من الطعام نفسه يساوى .... سعر حرارى.

(المعصرة - القاهرة - ١٩)

(أ) ٩٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٩٠٠ (د) ٩٠٠٠

[٢] $\sqrt[3]{9}$ .... $]-3 ، \infty[$ (كفر الدوار - البحيرة - ٢٠)

(أ) $\subset$ (ب) $\not\subset$ (جـ) $\in$ (د) $\notin$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] ميل المستقيم الموازى لمحور السينات يساوى .... (أبشواى - الفيوم - ٢٣)

[٢] نقطة تقاطع المستقيمين س = ٢ ، ص = ٣ هى .... (نبروة - الدقهلية - ٢٣)

[٣] إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ك) ، (٣ ، −١) هو ٢ فإن : ك = ...

(التحرير - البحيرة - ٢٣)

---

٣ الشكل المقابل يوضح العلاقة بين طول شخص (بالسنتيمتر) وعمره بالسنوات

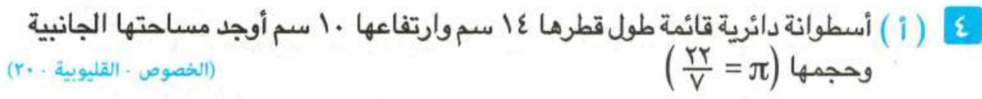
[١] أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$

[٢] احسب الفرق بين طول الشخص عندما كان عمره ٨ سنوات وطوله عندما كان عمره ٢٠ سنة.

الطول بالسم

العمر بالسنوات

(كفر شكر - القليوبية - ١٨)



٤ (أ) أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ١٤ سم وارتفاعها ١٠ سم أوجد مساحتها الجانبية وحجمها $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ (الخصوص - القليوبية - ٢٠)

(ب) **مثل بيانيًا العلاقة الآتية : ص − ٢ س = ١ ثم أوجد نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات.** (فاقوس - الشرقية - ١٩)

---

٥ إذا كانت : $ح_+$ هى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ، ى = [−٢ ، ٣] **أوجد :**

[١] $ح_+ \cap$ ى [٢] $ح_+ \cup$ ى [٣] $\acute{ح}_+$ (الوقف - قنا - ١٧)

اختبـار تراكمـى ١٤ حتى الدرس الأول الوحدة الثالثة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] العدد غير النسبى الذى ينحصر بين ٣ ، ٤ هو .... (الحامول - كفر الشيخ - ١٨)

(أ) ١,٥ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١١}$ (د) ٣,٥

[٢] $\sqrt{٥٠} - \sqrt{٨} =$ .... (أشمون - المنوفية - مجمع ٢١)

(أ) $\sqrt{٤٢}$ (ب) ٣ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٥٨}$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كان : (٣ ، ك) تحقق المعادلة ٢ س + ص = ١٠

فإن : ك = ... (التحرير - البحيرة - ٢٣)

[٢] ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٦) يساوى ....

(الخصوص - الدقهلية - ٢٣)

---

٣ فيما يلى بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :

٥	٩	١١	٤	٩	٩	١٦	٧	٨	١٢	٢	١٠	٧	١٢	٥
٨	١٥	١٣	١٣	٩	٧	١٤	١٩	٣	١١	١٤	٣	١٢	١٣	٧

كون الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات.

---

٤ (أ) **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية على صورة فترة :** $١ < ٣ س - ٢ < ١٣$

(شبرا - القاهرة - ١٧)

(ب) **أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة :** ص = س + ٢ ومثلها بيانيًا.

(شرق - الإسكندرية - ١٨)

---

٥ (أ) **اختصر لأبسط صورة :** ٤ $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢}$ (إسنا - الأقصر - ٢٠)

(ب) إذا كانت : س = $\sqrt{٥}$ + ٢ ، س ص = ١

أوجد : ص ثم أثبت أن : س ، ص مترافقان. (المنيا - المنيا - ١٩)

اختبار تراكمى 15 حتى الدرس الثانى الوحدة الثالثة

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] الشكل (٧ ، ٣ على خط الأعداد) يمثل الفترة .... (المرج - القاهرة - مجمع ٢١)

(أ)]٣ ، ٧[(ب) [٣ ، ٧] (جـ)]٣ ، ٧] (د) [٣ ، ٧[

[2] إذا كانت النقطة (٣ ، أ) تقع على المستقيم : ص + ٢ س = ٥ فإن : أ = ... (ديروط - أسيوط - ١٨)

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ١١ (د) صفر

---

2 أكمل ما يأتى :

[1] ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٨) ، (−١ ، ٤) هو .... (المرج - القاهرة - ٢٢)

[2] إذا كان : س + ص = س ص = $\sqrt{5}$ فإن : $س^2$ ص + $ص^2$ س = ...

(بنى عبيد - الدقهلية - ٢٣)

---

3 الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأجور ١٠٠ عامل بأحد المصانع أسبوعيًا :

المجموعات	−٥٠	−٦٠	−٧٠	−٨٠	−٩٠	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

[1] أوجد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٧٠ جنيهًا أسبوعيًا.

[2] ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

---

4 أوجد فى ح مجموعة حل كل من :

[1] ٢ $\sqrt[3]{س - ١}$ = ٣

[2] −٥ ≤ ٢ س − ٣ < ٧ مع تمثيل فترة الحل على خط الأعداد الحقيقية.

(الوقف - قنا - ١٧)

---

5 (أ) أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ إذا كان : أ (−١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥)

، هل النقطة جـ (٨ ، ١) تقع على $\overleftrightarrow{أب}$ (أبوالنمرس - الجيزة - ١٨)

(ب) مستعينًا بخط الأعداد إذا كانت : س = [٢ ، ∞[، ص =]−٢ ، ٣] فأوجد :

[1] س ∩ ص [2] س ∪ ص [3] س − ص

(سوهاج - سوهاج - ١٩)

اختبـــار تراكمـى ١٦ حتى الدرس الثالث الوحدة الثالثة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى يساوى .... (السويس - السويس - ١٩)

(أ) $\frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}}$ (ب) $\frac{\text{مجموع (ك + م)}}{\text{مجموع ك}}$

(جـ) $\frac{\text{مجموع ك × مجموع م}}{\text{مجموع ك}}$ (د) مجموع (ك × م) × $\frac{٢}{\text{مجموع ك}}$

[٢] إذا كان الوسط الحسابى للأعداد : ١٨ ، ٢٣ ، ٢ ك - ١ ، ٢٩ ، ك هو ١٨

فإن : ك = ... (السنطة - الغربية - ١٧)

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٢٩ (د) ٩٠

[٣] $\sqrt{أ} + \sqrt{١٨} = ٤\sqrt{٢}$ إذا كانت : أ = ... (المرج - القاهرة - ٢٠)

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

[٤] إذا كان الوسط الحسابى لأطوال أضلاع مثلث يساوى ١٢ سم فيكون محيط المثلث = ... سم. (الوقف - قنا - ١٧)

(أ) ٤ (ب) ٣٦ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] ميل الخط المستقيم الموازى لمحور السينات = ... (سوهاج - سوهاج - ٢٣)

[٢] إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ ومركزها هو ١٥ فإن الحد الأعلى هو ....

(قلين - كفر الشيخ - ٢٣)

[٣] مرافق العدد $(\sqrt{٢} + ١)$ هو .... (إسنا - الأقصر - ٢٢)

[٤] الوسط الحسابى للقيمتين : $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٤٥}$ هو .... (إبشواى - الفيوم - ٢٣)

٣ **الجدول الآتى يوضح التوزيع التكرارى للحافز الأسبوعى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع :**

الحوافز بالجنيه	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	ن -	٧٠ -
عدد العمال	١٠	ك	٢٢	٢٦	٢٠	٨

أوجد : [١] قيمة : ك ، ن [٢] الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

(الوقف - قنا - ١٧)

---

٤ (أ) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٢٤ سم^{٣} وارتفاعها ٦ سم

احسب طول قطر قاعدتها. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ (المطرية - القاهرة - ١٨)

(ب) إذا كانت : $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$ فضع س ، ص فى أبسط صورة

ثم أوجد قيمة : $س^{٢} ص^{٢}$ (زفتى - الغربية - ١٩)

اختبـــار تراكمـى ١٧ حتى الدرس الرابع الوحدة الثالثة

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

[١] ترتيب الوسيط للقيم : ٥ ، ٧ ، ٦ ، ٤ ، ٨ هو .... (٦ أكتوبر - الجيزة - ١٨)

(أ) الثالث. (ب) الرابع. (جـ) الخامس. (د) السادس.

[٢] الوسط الحسابى لخمسة أعداد هو ٧ فإن مجموع الأعداد هو ....

(كفر الزيات - الغربية - مجمع ٢١)

(أ) ١٢ (ب) ٣٥ (جـ) ٢١ (د) ١٨

[٣] (٣ ، ٢) لا يحقق العلاقة .... (بنها - القليوبية - ١٦)

(أ) ص + س = ٥ (ب) ٣ ص - س = ٣

(جـ) ص + س = ٧ (د) ٢ ص - س = ١

[٤] إذا كانت نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل هى (٣٠ ، ٥٠)

فإن مجموع التكرارات = ... (السنبلاوين - الدقهلية - ٢٠)

(أ) ٣٠ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٦٠

٢ أكمل ما يأتى :

[١] الوسيط لمجموعة القيم : ٧ ، ٣ ، ٩ ، ١ ، ٥ هو .... (إسنا - الأقصر - ٢٣)

[٢] متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم فيكون حجمه .... سم^{٣}

(ببا - بنى سويف - ٢٣)

[٣] إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد القيم = ...

(يوسف الصديق - الفيوم - ٢٣)

[٤] الوسيط لمجموعة القيم : ٣٤ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ٤٠ ، ٢٢ ، ٤ يساوى ....

(إهناسيا - بنى سويف - ٢٢)

---

٣ (أ) مثل العلاقة الخطية : ص = ٢ – س بيانيًا. (كفر الزيات - الغربية - ١٨)

(ب) الجدول الآتى يبين أحد التوزيعات التكرارية :

المجموعات	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	المجموع
التكرار	١٠	ك	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

أوجد : [١] قيمة ك

[٢] الوسيط باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الهابط. (كفر الزيات - الغربية - ١٨)

---

٤ (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة : -٣ ≤ ٢ - ٥ س ≤ ١٢ حيث س ∈ ع

(بنى سويف - بنى سويف - ١٦)

(ب) إذا كانت : س =]٣ ، ٧] ، ص = [٥ ، ∞[

مستعينًا بخط الأعداد أوجد كلًا مما يأتى :

[١] س ∩ ص [٢] س ∪ ص [٣] س – ص

(بنى سويف - بنى سويف - ١٦)

اختبـار تراكمى ١٨ حتى الدرس الخامس الوحدة الثالثة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] القيمة الأكثر شيوعًا أو تكرارًا لمجموعة قيم هى .... (الإسماعيلية - الإسماعيلية - ١٨)

(أ) الوسط الحسابى. (ب) الوسيط.

(جـ) المنوال. (د) المدى.

[٢] الوسط الحسابى للقيم : ل ، – ل ، ٣ ل يساوى .... (منفلوط - أسيوط - ٢٠)

(أ) ٣ ل (ب) ٢ ل (جـ) – ل (د) ل

[٣] $\sqrt{٤} - \sqrt[٣]{٨} =$ .... (غرب الفيوم - الفيوم - ١٦)

(أ) ٤ (ب) –٢ (جـ) صفر (د) –٤

[٤] المنوال للقيم : ٨ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt[٣]{٨}$ ، ٢ $\sqrt{٢}$ هو .... (المنشأة - سوهاج - مجمع ٢١)

(أ) ٨ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٢ $\sqrt{٢}$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] المنوال للقيم : ٣ ، ٦ ، ٥ ، ٦ ، ٣ ، ٦ ، ٥ هو .... (الإسماعيلية - ٢٣)

[٢] إذا كان : (أ ، ٣ أ) يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ١٥

فإن : أ = ... (سمنود - الغربية - ٢٣)

[٣] كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣} فإن طول نصف قطرها .... سم. (بورسعيد - بورسعيد - ٢٢)

[٤] إذا كان المنوال للأعداد : س + ١ ، ٤ ، ٥ ، ٧ هو ٤ فإن : س = ...

(قوص - قنا - ٢٣)

---

٣ (أ) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٧}$ س + ١ = ٨ فى ح (المنيا - المنيا - ١٩)

(ب) اختصر لأبسط صورة : $(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})^{٢} + \sqrt{٤٠}$ (شرق المنصورة - الدقهلية - ١٩)

---

٤ (أ) أوجد قيمة ص بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٢ ، ص) موازيًا لمحور السينات. (المعصرة - القاهرة - ١٩)

(ب) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى للأجور الأسبوعية لعدد ١٠٠ عامل بأحد المصانع :

مجموعات الأجر بالجنيه	٧٠–	٨٠–	٩٠–	١٠٠–	س –	١٢٠–	١٣٠–	المجموع
عدد العمال	١٠	١٣	م – ٤	٢٠	١٦	١٤	١١	١٠٠

أوجد : [١] قيمة كل من س ، م

[٢] الأجر المنوالى بالجنيه باستخدام المدرج التكرارى. (المعصرة - القاهرة - ١٩)

الاختبـــارات الشهريـــة

فى الجبر والإحصاء

محتوى امتحان شهر أكتوبر

الوحدة الأولى : الأعداد الحقيقية.

من الدرس رقم (١) الجذر التكعيبى للعدد النسبى إلى نهاية درس الفترات.

محتوى امتحان شهر نوفمبر

الوحدة الأولى : الأعداد الحقيقية.

من درس العمليات على الأعداد الحقيقية إلى نهاية الوحدة.



الدرجة
......
١٠

اختبار ١

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٣ درجات)

[١] إذا كان : $-\sqrt{25} = \sqrt[3]{ص}$ فإن : ص = ...

(أ) ٥ (ب) ‎-٥ (جـ) ١٢٥ (د) ‎-١٢٥

[٢] العدد غير النسبي المحصور بين ‎-٢ ، ‎-١ هو ....

(أ) ‎-٣ (ب) $-1\frac{1}{2}$ (جـ) $-\sqrt{3}$ (د) $\sqrt{2}$

[٣] $ح_+$ = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠]

(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

٢ أكمل ما يأتى : (٣ درجات)

[١] $ح_+ \cup ح_-$ = ...

[٢] مجموعة حل المعادلة $(س - \sqrt{5})(س + \sqrt{3})$ = صفر فى نَ هى ....

[٣] [١ ، ٤] - {١ ، ٤} = ...

٣ أثبت أن : $\sqrt{2}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥ (درجتان)

٤ مكعب سعته ٢٧ لترًا أوجد طول حرفه الداخلى. (درجتان)

الدرجة
١٠

اختبار ٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٣ درجات)

[١] $ح_+ \cap ح_-$ = ...

(أ) ح* (ب) ح (جـ) ن (د) $\varnothing$

[٢] $\sqrt[3]{٠,٠٠١ \times \frac{١}{٨}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢٠}$ (د) ٢٠

[٣] العدد الغير النسبى المحصور بين ٢ ، ٣ هو ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{-١}$ (جـ) $\sqrt{٧}$ (د) ٢ $\frac{١}{٢}$

٢ أكمل ما يأتى : (٣ درجات)

[١] إذا كان : $س^٣$ = ٢٧ فإن : س = ...

[٢] ن $\cup$ نَ = ...

[٣] مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ + ٤ = ٠ فى ح هى ....

٣ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : ٢ + $س^٣$ = ١ (درجتان)

٤ إذا كانت : س = [-١ ، ٤] ، ص = [٣ ، ∞[(درجتان)

أوجد مستعيناً بخط الأعداد كلًا من : س $\cup$ ص ، ص - س

الدرجة
10

اختبار 1

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (3 درجات)

[1] مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{3}$ س − 1 = 2 فى ح هى ....

(أ) $\{2\sqrt{3}\}$ (ب) $\{\sqrt{2}\}$

(جـ) $\{\sqrt{3}\}$ (د) $\{2 ، \sqrt{2}\}$

[2] مرافق العدد $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ هو ....

(أ) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (جـ) $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ (د) $-\sqrt{3}-\sqrt{2}$

[3] حجم كرة طول قطرها 6 سم = ... سم^3.

(أ) 288 (ب) 12 π (جـ) 36 π (د) 288 π

---

2 أكمل ما يأتى : (3 درجات)

[1] مكعب طول حرفه 4 سم فإن مساحته الكلية = ... سم^2.

[2] المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{2}}{6}$ هو ....

[3] إذا كانت : س^2 = $\frac{8}{9}$ فإن : س فى أبسط صورة = ...

---

3 اختصر لأبسط صورة : $2\sqrt{18}+\sqrt{50}+\frac{1}{3}\sqrt{162}$ (درجتان)

---

4 أوجد مجموعة حل المتباينة : (درجتان)

−1 > 3 س + 5 > 11 فى ح ومثلها على خط الأعداد.

الدرجة
......
١٠

اختبـار ٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٣ درجات)

[١] متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم

فإن حجمه = ... سم^{٣}.

(أ) $\sqrt{٣٠}$ (ب) $\sqrt{٦}$ (جـ) ٦ (د) $\sqrt{١٨}$

[٢] مجموعة حل المتباينة : $-$س $<$ ٢ في ح هى ....

(أ) $]-\infty$ ، ٢$[$ (ب) $]-\infty$ ، $-$٢$[$

(جـ) $[-$٢ ، $\infty[$ (د) $]-$٢ ، $\infty[$

[٣] المعكوس الجمعى للعدد $(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})$ هو ....

(أ) $\sqrt{٢} + \sqrt{٥}$ (ب) $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

(جـ) $\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$ (د) $-\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$

٢ أكمل ما يأتى : (٣ درجات)

[١] المحايد الضربى فى ح هو .... والمحايد الجمعى فى ح هو ....

[٢] $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ ، .... (بنفس التسلسل)

[٣] $\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٢} =$ ....

٣ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٢٤ سم^{٣} ، وارتفاعها ٦ سم

أوجد مساحتها الجانبية. $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$ (درجتان)

٤ إذا كانت : أ $= \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، ب $= \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة : أ^{٢} $-$ ب^{٢}

(درجتان)

الأسئلة الهامة

فى الجبر والإحصاء

من امتحانات الإدارات التعليمية



الأسئلة الهامة على الوحدة الأولى

الأعـداد الحقيقية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ $\sqrt[3]{-٢٧} + ٣ =$ .... (الزاوية الحمراء - القاهرة - ٢٠)

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) −٢٤

٢ العدد الغير نسبى المحصور بين ٢ ، ٣ هو .... (البدرشين - الجيزة - ١٩)

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٨}$ (جـ) $\sqrt{٧}$ (د) $٢\frac{١}{٢}$

٣ $\sqrt{٨} - \sqrt{٢} =$ .... (أشمون - المنوفية - ٢٠)

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٦}$ (جـ) $٢\sqrt{٢}$ (د) ٢

٤ [٣ ، ٧] − [٢ ، ٥] = ... (غرب طنطا - الغربية - ٢٠)

(أ) [٥ ، ٧] (ب)]٥ ، ٧] (جـ) {٥ ، ٧} (د)]٥ ، ٧[

٥ مجموعة حل المعادلة : $س^٣ = ٨$ فى ن هى .... (شرق - الإسكندرية - ١٩)

(أ) {−٢} (ب) {٢} (جـ) {٢ ، −٢} (د) {٦٤}

٦ المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو .... (طوخ - القليوبية - ٢٠)

(أ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٦}$ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) $-٢\sqrt{٣}$

٧ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π سم^٣ وارتفاعها ١٠ سم
فإن طول قطر قاعدتها .... (القناطر - القليوبية - ٢٠)

(أ) ٢ سم (ب) ٤ سم (جـ) ٦ سم (د) ٣ سم

٨ إذا كان : $\sqrt{٩} = \sqrt[3]{س}$ فإن : س = ... (الإبراهيمية - الشرقية - ٢٠)

(أ) ٢٧ (ب) ٦٤ (جـ) −٦٤ (د) −٢٧

٩ [٣ ، ٥] − {٥} = ... (غرب المنصورة - الدقهلية - ١٩)

(أ) [٣ ، ٤] (ب)]٣ ، ٥] (جـ) {٣ ، ٤} (د) [٣ ، ٥[

١٠ متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٦}$ سم يكون حجمه = ... سم^{٣}

(شبراخيت - البحيرة - ١٩)

(أ) ٦　　(ب) ٣٦　　(جـ) ٦ $\sqrt{٦}$　　(د) ١٨ $\sqrt{٢}$

---

١١ مجموعة حل المتباينة : −س < ٢ فى ح هى .... (التل الكبير - الإسماعيلية - ٢٠)

(أ)]−∞ ، ٢[　　(ب)]−∞ ، −٢[　　(جـ)]−٢ ، ∞[　　(د)]٢ ، ∞[

---

١٢ إذا كان : س < $\sqrt[٣]{٣٦}$ < س + ١ ، س ∈ ص فإن : س = ...

(الحامول - كفر الشيخ - ٢٠)

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) ٦

---

١٣ ح = ... (الهرم - الجيزة - ٢٠)

(أ)]. ، ∞[　　(ب)]−∞ ، ∞[　　(جـ)]−∞ ، .]　　(د)]١ ، ∞[

---

١٤ كرة طول قطرها ٦ سم يكون حجمها = ... سم^{٣} (الخارجة - الوادى الجديد - ٢٠)

(أ) ٩ π　　(ب) ١٢ π　　(جـ) ٣٦ π　　(د) ٢٢٨ π

---

١٥ كرة حجمها $\frac{٥٠٠}{٣}$ π سم^{٣} فيكون طول نصف قطرها = ... سم (الحامول - كفر الشيخ - ٢٠)

(أ) ١٠　　(ب) $\frac{٥}{٣}$　　(جـ) ٥　　(د) π

---

١٦ ثلاثة أرباع حجم كرة يساوى ٨ π سم^{٣}

فإن طول نصف قطرها يساوى .... سم (غرب طنطا - الغربية - ١٩)

(أ) ٦٤　　(ب) ٨　　(جـ) ٤　　(د) ٢

---

١٧ مكعب حجمه ٦٤ سم^{٣} فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢} (سنورس - الفيوم - ٢٠)

(أ) ٤　　(ب) ٨　　(جـ) ٦٤　　(د) ٩٦

---

١٨ أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها نق سم وارتفاعها يساوى طول قطرها

يكون حجمها .... سم^{٣} (ديروط - أسيوط - ٢٠)

(أ) π نق^{٣}　　(ب) π نق^{٢}　　(جـ) ٢ π نق^{٣}　　(د) ٢ نق^{٣}

١٩ ن ∩ نَ = …………… (الأزهر الشريف - أسيوط - ٢٠)

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) ن (د) نَ

---

٢٠ مجموعة حل المعادلة : سـ^٢ + ٩ = صفر فى ح هى …………… (حدائق القبة - القاهرة - ١٩)

(أ) {-٩} (ب) {-٣} (جـ) {٣ ، -٣} (د) ∅

---

٢١ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : -١ ≤ - سـ < ١ هى …………… (بنى مزار - المنيا - ١٩)

(أ)]-١ ، ١] (ب) [-١ ، ١[(جـ)]-١ ، ١[(د) [-١ ، ١]

---

٢٢ مكعب حجمه ٢ √٢ سم^٣ فإن طول حرفه = …………… سم (المنيا - المنيا - ١٩)

(أ) √٢ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١,٥

---

٢٣ مجموعة حل المعادلة : (سـ^٢ + ٤) (سـ^٢ - ٩) = ٠ فى ح هى ……………

(العجوزة - الجيزة - ٢٠)

(أ) {٣} (ب) {-٣} (جـ) {٣ ، -٣} (د) ∅

---

٢٤ المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم

وارتفاعها ٥ سم = …………… سم^٢ (التبين - القاهرة - ١٩)

(أ) ٥٠ π (ب) ٧٠ π (جـ) ٩ π (د) ٣٥ π

---

٢٥ ح₊ ∪ ح₋ = …………… (المعادى - القاهرة - ١٩)

(أ) ∅ (ب) {صفر} (جـ) ح (د) ح - {صفر}

---

٢٦ إذا كانت : سـ > ٥ فإن : √(٥ - سـ)^٢ = …………… (المعادى - القاهرة - ١٩)

(أ) ٥ - سـ (ب) √٥ - √سـ (جـ) سـ - ٥ (د) سـ + ٥

ثانيًا أسئلة الإكمال

١ ن ∪ نَ = …………… (الحامول - كفر الشيخ - ٢٠)

٢ ن ∩ نَ = …………… (العدوة - المنيا - ١٩)

٣ إذا كان : $\sqrt{أ} = ٢\sqrt{٣}$ فإن : أ = …………… (عابدين - القاهرة - ١٩)

٤ {-١ ، ٠ ، ١} ∩ [-١ ، ١] = …………… (شرق مدينة نصر - القاهرة - ١٩)

٥ [٣ ، ٤] - {٣ ، ٥} = …………… (أجا - الدقهلية - ٢٠)

٦ المعكوس الضربى للعدد $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ فى أبسط صورة هو …………… (الهرم - الجيزة - ١٩)

٧ إذا كان : $\frac{١}{س} = \sqrt{٥} - ٢$ فإن قيمة س فى أبسط صورة هى …………… (زفتى - الغربية - ١٩)

٨ ح+ فى صورة فترة = …………… (شرق - الإسكندرية - ٢٠)

٩ $\sqrt{٢٧} - \sqrt{٣} = \sqrt{……………}$ (إيتاى البارود - البحيرة - ١٩)

١٠ العدد غير النسبى $\sqrt{١٠}$ يقع بين عددين صحيحين متتاليين هما …………… ، ……………
(منفلوط - أسيوط - ٢٠)

١١ العدد التالى فى النمط : $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{١٨}$ ، $\sqrt{٣٢}$ هو …………… (شبين القناطر - القليوبية - ٢٠)

١٢ مكعب مجموع أطوال أحرفه ٤٨ سم فإن حجمه …………… (يوسف الصديق - الفيوم - ١٩)

١٣ حجم الكرة التى طول قطرها ٢ سم هو …………… π سم^{٣} (الخانكة - القليوبية - ٢٠)

١٤ الكرة التى حجمها $\frac{٩}{٢}$ π سم^{٣} يكون طول قطرها = …………… سم. (المحمودية - البحيرة - ١٩)

١٥ محيط المستطيل الذى بعداه هما $(٣ - \sqrt{٥})$ سم ، $(٣ + \sqrt{٥})$ سم يساوى ……………
(حدائق القبة - القاهرة - ١٩)

١٦ إذا كان محيط دائرة ٤ $\sqrt{٥}$ π سم فإن مساحتها = …………… سم^{٢}
(البساتين ودار السلام - القاهرة - ١٩)

١٧ $\sqrt{٩ + ١٦} = ٣ + \text{..............}$

١٨ المعكوس الجمعي للعدد $\sqrt[٣]{-٨}$ هو .... (زفتى - الغربية - ٢٠)

١٩ إذا كانت : س = $\sqrt{٣} + ٢$ ، ص = $\sqrt{٣} - ٢$

فإن (س ص ، س + ص) = (.............. ، ....) (بنها - القليوبية - ١٩)

٢٠ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ١٢٥ π سم^٣ ، وارتفاعها = طول نصف قطرها

فإن : نق = ... سم (شرق طنطا - الغربية - ١٩)

٢١]-٢ ، ٣[∩ ح = ... (غرب الفيوم - الفيوم - ٢٠)

٢٢ [-١ ، ٢] ∩ ص = ... (نبروه - الدقهلية - ٢٠)

٢٣ ح_ ∩ [-٣ ، ٢] = ... (شمال - الجيزة - ١٩)

٢٤ $\sqrt{أ} + \sqrt{١٨} = ٤\sqrt{٢}$ اذا كانت أ = ... (فرشوط - قنا - ٢٠)

ثالثًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : س = [-٣ ، ٢] ، ص = [-١ ، ٥]

أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

[١] س ∪ ص [٢] س ∩ ص [٣] س − ص (فرشوط - قنا - ٢٠)

٢ إذا كانت : أ =]-∞ ، ٣] ، ب = [-٢ ، ٥]

أوجد مستعينًا بخط الأعداد : ب − أ ، أ ∩ ب ، أ ∪ ب ، أَ (حدائق القبة - القاهرة - ١٩)

٣ إذا كانت : س = $\sqrt{٣} + ١$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣} + ١}$

أوجد قيمة المقدار : $\frac{\text{س ص}}{\text{س − ص}}$ (القناطر - القليوبية - ٢٠)

٤ إذا كان : س = $\frac{١}{\sqrt{٥} + ٢}$ ، ص = $\sqrt{٥} + ٢$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد : س^{٢} ص^{٢} فى أبسط صورة. (غرب - الإسكندرية - ١٩)

---

٥ إذا كانت : س = $\sqrt{٧} - \sqrt{٥}$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}}$

أوجد قيمة المقدار : س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} (أجا - الدقهلية - ٢٠)

---

٦ إذا كان : س = $\sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، ص = $\frac{٢}{س}$ **فأثبت أن : س ، ص عددان مترافقان**

ثم أوجد قيمة : س^{٢} + س ص + ص^{٢} (المحمودية - البحيرة - ١٩)

---

٧ إذا كان : س = $\sqrt{٤ + \sqrt{٧}}$ ، ص = $\sqrt{٤ - \sqrt{٧}}$

أوجد : (س + ص)^{٢} فى أبسط صورة. (نبروه - الدقهلية - ٢٠)

---

٨ إذا كانت : س = $\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٥}}{\sqrt{٦} - \sqrt{٥}}$ **فأثبت أن : س + $\frac{١}{س}$ = ٢٢** (شرق الزقازيق - الشرقية - ٢٠)

---

٩ أوجد مجموعة حل المتباينة : ٥ س − ٣ > ٢ س + ٩ فى ح (القليوبية - ٢٠)

---

١٠ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة ومثلها على خط الأعداد : ٥ − ٣ س > ١١

(أبو كبير - الشرقية - ٢٠)

---

١١ أوجد مجموعة الحل فى ح ومثل الحل على خط الأعداد : ١ > ٢ س + ٣ ≥ ٩ (الهرم - الجيزة - ١٩)

---

١٢ أوجد مجموعة الحل فى ح ومثلها على خط الأعداد : ٢ > $\frac{س}{٣}$ + ٢ > ٣ (نبروه - الدقهلية - ٢٠)

---

١٣ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : ٤ س + ٣ > ٥ س + ٢ > ٤ س

ومثل الحل على خط الأعداد. (مصر الجديدة - القاهرة - ١٩)

---

١٤ اختصر لأبسط صورة : $\sqrt[٣]{٢}\,(\sqrt[٣]{٤} + ٢) - ٢\,(\sqrt[٣]{٢} + ١)$ (نبروه - الدقهلية - ٢٠)

١٥ اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{75} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{\frac{1}{3}}$ (أجا - الدقهلية - ٢٠)

---

١٦ اختصر لأبسط صورة : $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ (وسط - الإسكندرية - ١٩)

---

١٧ أوجد فى أبسط صورة : $\sqrt{12} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt{3} - \sqrt[3]{16}$ (مشتول السوق - الشرقية - ٢٠)

---

١٨ أوجد فى أبسط صورة : $\sqrt{50} + \sqrt[3]{54} - 10\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{16}$ (شرق مدينة نصر - القاهرة - ٢٠)

---

١٩ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $(س - 2)^3 = 125$ (دير مواس - المنيا - ١٩)

---

٢٠ كرة حجمها ٣٦ π سم^3 أوجد :

[١] طول نصف قطر الكرة [٢] مساحة الكرة بدلالة π (شبين الكوم - المنوفية - ٢٠)

---

٢١ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها

أوجد ارتفاع الأسطوانة إذا علم أن حجم الأسطوانة ٢٧ π سم^3 (شرق مدينة نصر - القاهرة - ٢٠)

---

٢٢ أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها $4\sqrt{2}$ سم وارتفاعها ٩ سم

أوجد حجمها بدلالة π (العجوزة - الجيزة - ١٩)

---

٢٣ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم وطول نصف قطر قاعدتها ٧ سم

احسب حجمها ومساحتها الجانبية علمًا بأن $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ (المنيا - المنيا - ١٩)

---

٢٤ كرة من المعدن طول قطرها ٦ سم صهرت وحولت إلى أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم احسب ارتفاع الأسطوانة. (مغاغة - المنيا - ١٩)

---

٢٥ أسطوانة معدنية دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم وارتفاعها ٤ سم صهرت وحولت إلى كرة. أوجد طول نصف قطر هذه الكرة. (نبروه - الدقهلية - ٢٠)

---

٢٦ أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٤٠ سم^2 وارتفاعها ١٠ سم

أوجد حجمها علمًا بأن $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ (ملوى - المنيا - ١٩)

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ أى الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة ٢ س + ص = ٥ ؟ (سمالوط - المنيا - ١٩)

(أ) (-١ ، ٣) (ب) (١ ، ٣) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٢ ، ٢)

---

٢ الزوج المرتب الذى لا يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥ مما يأتى هو ....

(شرق المنصورة - الدقهلية - ٢٠)

(أ) (١ ، ٣) (ب) (-١ ، ٧) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٤ ، -٣)

---

٣ إذا كان (٥ ، ٢) يحقق العلاقة : س + ٢ ص = حـ فإن : حـ = ...

(المستقبل - القاهرة - ٢٠)

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ٧ (د) ٦

---

٤ إذا كانت النقطة (ك ، ٢ ك) تحقق العلاقة : ص + ٢ س = ٨ فإن : ك = ...

(السلام - القاهرة - ٢٠)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٥ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ك) ، (٤ ، ٥) يوازى محور السينات

فإن : ك = ... (الأقصر - الأقصر - ٢٠)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) -٥

---

٦ ميل المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٥) ، (٤ ، ٨) هو .... (منشأة القناطر - الجيزة - ٢٠)

(أ) صفر (ب) غير معرف (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

---

٧ إذا كان : أ (-٣ ، ١) ، ب (١ ، ٣) فإن : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ... (منيا القمح - الشرقية - ١٩)

(أ) -١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

---

٨ العلاقة ٢ س + ٧ ص = ١٤ يمثلها مستقيم يقطع محور السينات فى ....

(شبين القناطر - القليوبية - ١٩)

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٧ ، ٠) (د) (٠ ، ٧)

٩ ميل المستقيم الأفقى = ... (مطاى - المنيا - ٢٠)

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) غير معرف.

---

١٠ معادلة محور السينات هى .... (المحمودية - البحيرة - ١٩)

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠

(جـ) س = ص (د) ص = - س

ثانيًا أسئلـة الإكمـال

١ ميل المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٤) ، (٠ ، ٥) هو ....

(الخليفة والمقطم - القاهرة - ١٩)

---

٢ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات هو .... (شبرا - القاهرة - ٢٠)

---

٣ ميل المستقيم العمودى على محور الصادات هو .... (شرق المنصورة - الدقهلية - ٢٠)

---

٤ المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٢ ، ص) يوازى محور السينات

فإن : ص = ... (سمالوط - المنيا - ٢٠)

---

٥ العلاقة ص = ٥ يمثلها خط مستقيم يوازى محور .... وميله = ...

(منيا القمح - الشرقية - ٢٠)

---

٦ إذا كان (-٣ ، ٢) يحقق العلاقة : ٥ س - ك ص = ٧ فإن : ك = ...

(قويسنا - المنوفية - ١٩)

---

٧ إذا كان : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة فإن : ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل ....

(الزيتون - القاهرة - ١٩)

---

٨ إذا كان الزوجان المرتبان (أ ، ٢) ، (٣ ، ب) يحققان العلاقة : س + ٢ ص = ٣

فإن : أ = ... ، ب = ... (مصر الجديدة - القاهرة - ١٩)

٩ إذا كان : أ (٣ ، ص) ، ب (٦ ، ٥) وكان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى $\frac{٢}{٣}$
فإن : ص = ... (القناطر - القليوبية - ٢٠)

١٠ العلاقة : ٨ س + ٣ ص = ٢٤ يمثلها بيانيًا مستقيم يقطع محور الصادات
فى النقطة .... (المعصرة - القاهرة - ١٩)

ثالثًا الأسئلة المقالية

١ مثل بيانيًا العلاقة : ص = س + ٢ (المنيا - المنيا - ١٩)

٢ مثل بيانيًا العلاقة : س + ص = ٣ ثم أوجد نقطة التقاطع مع محور السينات.
(المرج - القاهرة - ١٩)

٣ ارسم بيانيًا العلاقة : ص = ٢ − س ثم أوجد ميل المستقيم. (شبراخيت - البحيرة - ١٩)

٤ أوجد نقطتى تقاطع المستقيم : ٢ س + ٣ ص = ١٢ مع محورى الإحداثيات.
(الخانكة - القليوبية - ٢٠)

٥ أثبت أن النقط : أ (−١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٤) ، حـ (٥ ، ٥)
تقع على استقامة واحدة. (دير مواس - المنيا - ٢٠)

٦ هل النقط أ (٢ ، −١) ، ب (−١ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٣) تقع على استقامة واحدة ؟
(عين شمس - القاهرة - ١٩)

٧ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ١٧) (٦ ، هـ) يساوى ٤ أوجد قيمة هـ
(التبين - القاهرة - ١٩)

٨ إذا كان (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : ٣ س + ص = ٣٠ فأوجد قيمة ك (كرداسة - الجيزة - ٢٠)

٩ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ إذا كان : أ (−١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥)
هل النقطة حـ (٨ ، ١) تقع على $\overleftrightarrow{أب}$ ؟ (٦ أكتوبر - الجيزة - ١٩)

١٠ إذا كان : أ (٣ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥)
أثبت أن : $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات. (العمرانية - الجيزة - ٢٠)

الأسئلة الهامة على الوحدة الثالثة

الإحصاء

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ المنوال للقيم : ٣ ، ٤ ، ١٠ ، ٤ هو .... (فوه - كفر الشيخ - ٢٠)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

---

٢ الوسط الحسابى للأعداد : ١٠ ، ١٢ ، ٨ هو .... (شرق مدينة نصر - القاهرة - ٢٠)

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٠

---

٣ الوسيط للقيم : ٣٤ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ٤٠ ، ٢٢ ، ٤ هو .... (الخانكة - القليوبية - ١٩)

(أ) ٢٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٢٤ (د) ٢٥

---

٤ الوسط الحسابى للقيم : ٥ − س ، ٥ ، ٥ + س هو .... (الحامول - كفر الشيخ - ٢٠)

(أ) ٥ (ب) ٨١ (جـ) ١٣ (د) ٣

---

٥ إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ٥ ، ٧ ، ٨ ، س هو ٦ فإن : س = ...

(أبو حمص - البحيرة - ١٩)

(أ) ٨ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٤

---

٦ إذا كان ترتيب الوسيط هو الرابع فإن عدد القيم .... (السلام - القاهرة - ٢٠)

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

---

٧ إذا كان المنوال لمجموعة القيم : ١٥ ، ١١ ، ٥ س ، ٤ هو ١٥

فإن : س = ... (غرب الفيوم - الفيوم - ١٩)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٥

---

٨ إذا كان المنوال لمجموعة القيم : ١٢ ، ٧ ، س + ١ ، ٧ ، ١٢ هو ٧

فإن : س = ... (الحامول - كفر الشيخ - ٢٠)

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١١

٩ مركز المجموعة الأولى من المجموعات : ٧- ، ١٣- ، ١٩- ، ٢٥- هو ....

(شبراخيت - البحيرة - ١٩)

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٣

---

١٠ مجموعة حدها الأدنى ٤ وحدها الأعلى ٨ فإن مركزها = ...

(مشتول السوق - الشرقية - ١٩)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

١١ إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ والحد الأعلى لها هو س ومركزها ١٥

فإن : س = ... (حلوان - القاهرة - ٢٠)

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٨

---

١٢ الوسط الحسابى لخمس قيم هو ٨ فإن مجموع هذه القيم = ... (المطرية - القاهرة - ٢٠)

(أ) ١٣ (ب) ١٦ (جـ) ٤٠ (د) ٦٤

---

١٣ نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والنازل تعين على محور المجموعات ....

(أبو كبير - الشرقية - ١٩)

(أ) الوسط الحسابى. (ب) الوسيط. (جـ) المنوال. (د) التكرارات.

---

١٤ إذا كانت النقطة (١٦ ، ٣٠) هى نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط

فإن الوسيط = ... (نجع حمادى - قنا - ٢٠)

(أ) ١٦ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

---

١٥ إذا كان ترتيب الوسيط لتوزيع تكرارى هو ٥٠ فإن مجموع التكرارات = ...

(غرب الفيوم - الفيوم - ١٩)

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ٥

ثانيًا أسئلة الإكمال

١ الوسيط للقيم : ٥ ، ٣ ، ١١ ، ٧ ، ٢ هو .... (العجوزة - الجيزة - ١٩)

٢ المنوال للقيم : ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٣ ، ٨ هو .... (حلوان - القاهرة - ٢٠)

٣ إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ك - ١ ، ك هو ١٨

فإن : ك = ... (غرب شبرا الخيمة - القليوبية - ١٩)

٤ ترتيب الوسيط لمجموعة القيم : ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٨ ، ٤ هو .... (الحامول - كفر الشيخ - ٢٠)

٥ الوسط الحسابى هو أحد مقاييس .... (قويسنا - المنوفية - ١٩)

٦ إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢س هو ٨ فإن : س = ...

(زفتى - الغربية - ١٩)

٧ إذا كانت نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط هى (٣٥ ، ٢٠)

فإن مجموع التكرارات للتوزيع التكرارى هو .... (أجا - الدقهلية - ٢٠)

٨ الوسط الحسابى للقيم : ٢ - هـ ، ٤ ، ٥ ، ٣ + هـ ، ١ هو ....

(شبراخيت - البحيرة - ١٩)

٩ إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الخامس والسادس

فإن عدد هذه القيم = ... (كوم حمادة - البحيرة - ١٩)

١٠ نقطة تقاطع المنحنيين المتجمع الصاعد والهابط تمثل .... على محور المجموعات.

(دير مواس - المنيا - ١٩)

ثالثًا الأسئلة المقالية

١ التوزيع التكرارى التالى يبين درجات ٢٠ طالب وطالبة فى مادة الرياضيات :

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

احسب الوسط الحسابى. (أبو قرقاص - المنيا - ١٩)

---

٢ الجدول الآتى يوضح التوزيع التكرارى لحوافز ١٠٠ عامل :

الحافز	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	ن –	٧٠ –
عدد العمال	١٠	ك	٢٢	٢٥	٢٠	٨

أوجد : [١] قيمة كل من : ن ، ك [٢] الوسط الحسابى. (أجا - الدقهلية - ٢٠)

---

٣ التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٣٥ طالب فى مادة الرياضيات

ارسم المدرج التكرارى ومن الرسم أوجد الدرجة المنوالية :

المجموعات	٢ –	٤ –	٦ –	٨ –	١٠ – ١٢	المجموع
التكرار	٥	٨	١٠	٨	٤	٣٥

(سنورس - الفيوم - ٢٠)

---

٤ الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٢٠ طفلًا بالكيلو جرام :

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد او النازل أوجد الوسيط لهذا التوزيع.

(كفر الدوار - البحيرة - ١٩)

الامتحانات النهائيـــة

فى الجبر والإحصاء

- نماذج امتحانات الكتاب المدرسى.
- امتحانات بعض مدارس المحافظات.



نموذج 1

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 أكمل ما يأتى :

[1] مجموعة حل المعادلة : (س^{2} + ٣) (س^{3} + ١) = ٠ هى .... (س ∈ ع)

[2] إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ والحد الأعلى لها هو س ومركزها هو ١٥

فإن : س = ...

[3]]-٢ ، ٢[∪ {-٢ ، ٠} = ...

[4] المكعب الذى حجمه ٨ سم^{3} يكون مجموع أطوال أحرفه .... سم

[5] المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ فى أبسط صورة هو ....

---

2 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] إذا كان طول نصف قطر كرة يساوى ٦ سم فإن حجمها يساوى ....

(أ) ٦ π سم^{3} (ب) ٣٦ π سم^{3} (جـ) ٧٢ π سم^{3} (د) ٢٨٨ π سم^{3}

[2] إذا كانت النقطة (أ ، ١) تحقق العلاقة : س + ص = ٥ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ٥

[3] $(2\sqrt[3]{2})^{3}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٤٠

[4] الوسيط لمجموعة القيم : ٣٤ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ٤٠ ، ٢٢ ، ٤ هو ....

(أ) ٢٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٢٤ (د) ٢٥

[5] إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ٢٧ ، ٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٦ ، ك هو ١٤

فإن : ك = ...

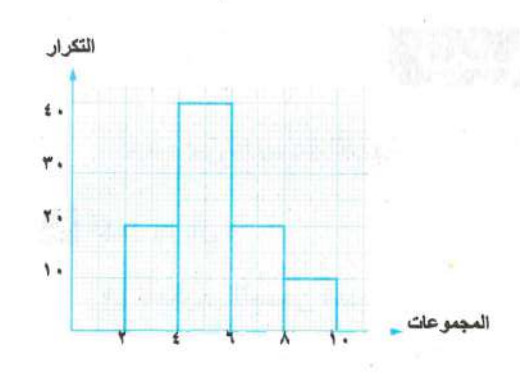
(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢٧ (د) ٨٤

٦ في الشكل المقابل :

قيمة المنوال = ...

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٤٠



---

٣ (أ) **أوجد قيمة :** $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤}$

(ب) إذا كان : $س = \frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ ، $ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

أثبت أن : س ، ص عددان مترافقان.

---

٤ (أ) **ارسم بيانيًا العلاقة الخطية :** ص = ٢ − س

(ب) **أوجد مجموعة حل المتباينة :** $\frac{٣س + ١}{٦} < س + ١ < \frac{س + ٤}{٢}$ في ح

ومثلها على خط الأعداد.

---

٥ (أ) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها $٤\sqrt{٢}$ سم وارتفاعها ٩ سم ، أوجد حجمها بدلالة π وإذا كان حجمها يساوى حجم كرة فأوجد طول نصف قطر الكرة.

(ب) **أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :**

المجموعات	٥−	١٥−	٢٥−	٣٥−	٤٥−	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

نموذج ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

[١] المعكوس الجمعى للعدد : $-\sqrt{٣} - \sqrt{٥}$ هو ....

[٢] $\left(\sqrt{٨} + \sqrt{٢}\right)\left(\sqrt{٨} - \sqrt{٢}\right) =$ ....

[٣] مرافق العدد $\frac{٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ هو ....

[٤] إذا كان حجم كرة = $\frac{٩}{٢}\pi$ سم^{٣} فإن طول قطرها = ...

[٥] $[٣ ، ٤] - \{٣ ، ٥\} =$ ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان حجم مكعب = ٢٧ سم^{٣} فإن مساحة أحد أوجهه = ...

(أ) ٣ سم^{٢} (ب) ٩ سم^{٢} (جـ) ٣٦ سم^{٢} (د) ٥٤ سم^{٢}

[٢] إذا كان المنوال لمجموعة القيم : ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢ س هو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

[٣] إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ ك − ١ ، ك هو ١٨
فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٢٩ (د) ٩٠

[٤] إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ٨ فإن مركزها هو ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

[٥] أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها يساوى نق سم وارتفاعها يساوى طول قطر قاعدتها ، يكون حجمها يساوى .... سم^{٣}

(أ) π نق^{٣} (ب) π نق^{٢} (جـ) ٢ π نق^{٣} (د) ٢ نق^{٣}

[٦] مجموعة حل المعادلة : س (س^{٢} − ١) = صفر ، س ∈ ح هى ....

(أ) {٠}　(ب) {١}　(جـ) {−١}　(د) {٠ ، −١ ، ١}

---

٣ **(أ) اختصر لأبسط صورة :** $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} + \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$

(ب) أثبت أن : $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{١٦} - ٢\sqrt[٣]{٥٤}$ = صفر

---

٤ **(أ) أوجد مجموعة حل المتباينة :** −٢ < ٣ س + ٧ ≤ ١٠ فى ح مع تمثيل فترة الحل على خط الأعداد.

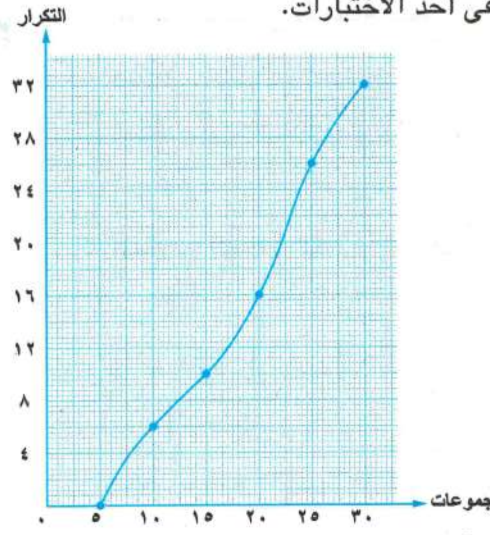
(ب) إذا كانت : س = $\sqrt{٢} + \sqrt{٣}$ **فأوجد قيمة :** س^{٤} − ٢ س^{٢} + ١

---

٥ **(أ)** الشكل المقابل يمثل درجات ٣٢ طالبًا فى أحد الاختبارات.

أكمل :

الدرجة الوسيطية = ...



(ب) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥−	١٥−	٢٥−	٣٥−	٤٥−	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

نموذج امتحان للطلاب المدمجين

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل العبارات التالية لتصبح صحيحة :

[١] مرافق العدد $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ هو ....

[٢] $\sqrt{18} + \sqrt{54} - 3\sqrt{2} =$ ....

[٣] المنوال لمجموعة القيم : ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٤ ، ٣ هو ....

[٤] الوسيط لمجموعة القيم : ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ هو ....

[٥] مجموعة حل المعادلة : $س^2 + 9 =$ صفر فى ح هى ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الوسط الحسابى لمجموعة القيم : ٩ ، ٦ ، ٥ ، ١٤ ، ١ يساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٩

[٢] أبسط صورة للمقدار : $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ هى ....

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) $2\sqrt{3}$

[٣] المعكوس الجمعى للعدد $-\sqrt{5}$ هو ....

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) -5

[٤] $[3 ، 5] - \{3 ، 5\} =$ ....

(أ) $]3 ، 5[$ (ب) $]3 ، 5]$ (جـ) $\varnothing$ (د) $[3 ، 5[$

[٥] مكعب حجمه ٦٤ سم^3 فإن طول حرفه .... سم

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

---

٣ اكتب أمام العبارة فى العمود الثانى رقم الجملة المناسبة لها من العمود الأول :

[١] مجموعة حل المعادلة : $س^2 - 25 = 0$ فى ح هى .... (   ) $[0 ، 2]$

[٢] $[-3 ، 2] \cap [0 ، 2] =$ .... (   ) ٧

[٣] إذا كان ترتيب الوسيط هو الرابع فإن عدد القيم هو .... (   ) $\{5 ، -5\}$

[٤] $\sqrt{3}$ هو عدد .... ( ) غير نسبى

[٥] مجموعة حل المتباينة : ٣ ≥ س ≥ ٧ على خط الأعداد هى .... ( )

(خط أعداد عليه النقطتان ٣ ، ٧)

---

٤ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ :

[١] الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = مجموع القيم ÷ عددها ( )

[٢] إذا كان : س = $\sqrt{13} - \sqrt{7}$ ، ص = $\sqrt{13} + \sqrt{7}$

فإن : س ، ص مترافقان. ( )

[٣] العدد غير النسبى $\sqrt{7}$ يقع بين ٢ ، ٣ ( )

[٤] $\sqrt{75} - 2\sqrt{27} = 7\sqrt{3}$ ( )

[٥] أبسط صورة للعدد $\frac{1}{\sqrt{5}}$ هى $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ( )

---

٥ (أ) أكمل : إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ٨

فإن مركزها = $\frac{\text{...............} + \text{...............}}{2}$ = ...

(ب) الجدول الآتى لإيجاد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

المجموعات	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	مركز المجموعة × التكرار (م × ك)
٥ –	١٠	٧	١٠ × ٧ = ٧٠
١٥ –	٢٠	١٠	٢٠ × ١٠ = ...
٢٥ –	....	....	.... × ١٢ = ...
٣٥ –	....	....	.... × ١٣ = ...
٤٥ –	....	....	.... × ٨ = ...
المجموع		٥٠	....

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجـ (ك × م)}}{\text{مجـ (ك)}}$ = $\frac{\text{...............}}{\text{...............}}$ = ...



١ إدارة السيدة زينب توجيه الرياضيات — محافظة القاهرة

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] ن ∪ نَ = ...

(أ) ح (ب) ح* (جـ) ∅ (د) ن

[٢] الوسيط للقيم : ٣ ، ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٤ هو ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣

[٣] إذا كان حجم كرة $\frac{٥٠٠}{٣}$ π سم^٣ فإن طول نصف قطرها .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) π (د) ٦

[٤] مكعب حجمه ٢٧ سم^٣ يكون طول حرفه .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ٣

[٥] $\sqrt{٢٧} - \sqrt{٣}$ = ...

(أ) $\sqrt{٩}$ (ب) ٣ (جـ) ٢$\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٣}$

---

٢ أكمل العبارات الآتية :

[١] المعكوس الجمعى للعدد : $\sqrt{٦} - \sqrt{٣}$ هو ....

[٢] المربع الذى مساحته ١٦ سم^٢ يكون طول ضلعه .... سم.

[٣] مجموعة حل المعادلة : س^٢ + ٤ = صفر فى ح هى ....

[٤] المنوال للقيم : ٤ ، ٢ ، ٨ ، ٧ ، ٩ ، ٧ هو ....

---

٣ (أ) إذا كانت : س = [−٣ ، ٢[، ص = [−١ ، ٥] مستعينا بخط الأعداد أوجد :

[١] س ∩ ص [٢] س ∪ ص

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة : ٥ س − ٣ > ٢ س + ٩ فى ح

٤ (أ) **أثبت أن : أ (−١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٤) ، حـ (٥ ، ٥) على استقامة واحدة.**

(ب) **اختصر لأبسط صورة :** $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤}$

---

٥ (أ) **مثل بيانيًا العلاقة الخطية : ص = س − ٢**

(ب) **فيما يلى توزيع تكرارى :**

المجموعات	٥ −	١٥ −	٢٥ −	٣٥ −	٤٥ −	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع التكرارى.

٢ إدارة شرق مدينة نصر
مدارس منارة السالم الخاصة
محافظة القاهرة



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة :**

[١] ميل أى مستقيم يوازى محور السينات ....

(أ) غير معرف. (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

[٢] $(٢\sqrt[٣]{٢})^٣$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٤٠

[٣] حجم متوازى المستطيلات الذى أبعاده هى $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم هو .... سم^٣.

(أ) ٦ (ب) ٣٦ (جـ) $١٨\sqrt{٢}$ (د) $٦\sqrt{٦}$

[٤] [١ ، ٣] − {١ ، ٣} = ...

(أ) [١ ، ٣[(ب)]١ ، ٣] (جـ) ∅ (د)]١ ، ٣[

[٥] إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٦ والحد الأعلى ١٠ فإن مركز المجموعة هو ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ٨

٢ أكمل :

[١] المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ هو ....

[٢] أبسط صورة للمقدار $(\sqrt{٧} + ٢)(\sqrt{٧} - ٢)$ هى ....

[٣] مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٩ = ٠$ فى ح هى ....

[٤] إذا كانت : أ = (–٣ ، ١) ، ب = (٢ ، –٥) فإن : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

---

٣ (أ) أوجد فى أبسط صورة : $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{٥٤}$

(ب) إذا كانت : $س = \frac{٤}{٣ - \sqrt{٥}}$ ، $ص = ٣ - \sqrt{٥}$

أثبت أن : س ، ص مترافقان **ثم أوجد :** $(س + ص)^٢$

---

٤ (أ) إذا كانت : س = [–١ ، ٤] ، ص = [٢ ، ٧] أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

[١] س ∪ ص　　　　[٢] س ∩ ص

(ب) إذا كان الزوج المرتب (٣ ل ، ٢ ل) يحقق العلاقة : ص = ٢ س – ٨ **أوجد قيمة : ل**

---

٥ (أ) أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتى فى ح :

[١] $٨ س^٣ - ٢٠ = ٧$　　　　[٢] $٣ س + ٧ \geq ١٠$

(ب) **أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :**

المجموعات	صفر –	٤ –	٨ –	١٢ –	١٦ –	المجموع
التكرار	٢	١٠	٨	٧	٣	٣٠

٣ محافظة الجيزة

إدارة ٦ أكتوبر
توجيه الرياضيات



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت النقطة (–٣ ، ل) تحقق العلاقة : س + ٢ ص = ٥ فإن : ل = ...

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) ٤

[٢] مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ + ٤٩ = ٠ في ح هي ....

(أ) {٠} (ب) ∅ (جـ) {٧} (د) {-٧}

[٣] إذا كان المنوال للقيم : ٣ ، ٥ ، ٢ ، س + ٢ هو ٥ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

[٤] إذا كان حجم مكعب = ٦٤ $سم^٣$ فإن مجموع أطوال أحرفه = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦٤ (جـ) ٤٨ (د) ١٠٠

[٥] العدد غير النسبي الذي ينحصر بين ٢ ، ٣ هو ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٤}$ (جـ) $\sqrt{٦}$ (د) $\sqrt{٩}$

---

٢ أكمل كلًا مما يأتي :

[١] الوسيط للقيم : ٨ ، ١٣ ، ٦ ، ١٠ ، ٥ ، ١١ هو ....

[٢] ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٧) يساوي ....

[٣] [٣ ، ٤] - {٣ ، ٥} = ...

[٤] ٧٥ ٪ من العدد ٨٠ يساوي ....

---

٣ (أ) إذا كانت : س = [-٢ ، ٣] ، ص = [١ ، ٥]

أوجد مستعينًا بخط الأعداد على صورة فترة : س ∩ ص ، س ∪ ص

(ب) **أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التالي :**

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

---

٤ (أ) **أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : ٢ س - ١ ≤ ٧ ومثلها على خط الأعداد.**

(ب) **اختصر لأبسط صورة :** $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$

---

٥ (أ) إذا كانت : س = $\frac{٣}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$ ، ص = $\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ **أثبت أن : س ، ص مترافقان**

ثم أوجد قيمة : س ص

(ب) **أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = س + ٢ ثم مثلها بيانيًا.**



٤ محافظة الإسكندرية

إدارة وسط
توجيه الرياضيات - الفترة المسائية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة :

[١] إذا كانت النقطة (٢ ، -٥) تحقق العلاقة : ٣ س - ص = أ فإن : أ = ...

(أ) ١١ (ب) -١١ (جـ) ١ (د) -١

[٢] ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات ....

(أ) غير معرف. (ب) صفر (جـ) -١ (د) ١

[٣] إذا كان : $\frac{س}{ص}$ = ١ فإن : ٥ س - ٥ ص = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) صفر (د) ١

[٤] المنوال للقيم : ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٥ هو ....

(أ) ٧ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٥

[٥] الزوج المرتب الذى يحقق العلاقة : س + ص = ٥ هو ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (-٥ ، ٠) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (-٤ ، -١)

---

٢ أكمل كلًا مما يأتى :

[١] [-٣ ، ٣] -]-٣ ، ٣[= ....

[٢] مكعب حجمه ٦٤ سم^{٣} فإن طول حرفه .... سم.

[٣] الوسيط للقيم : ١٥ ، ٢٢ ، ٩ ، ١١ ، ٣٣ هو ....

[٤] العدد النسبى $\frac{س - ٣}{س + ٣}$ = صفر إذا كانت : س = ...

---

٣ (أ) ارسم العلاقة الخطية : ص = س + ٢

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد : -٨ ≥ ٣ س + ١ ≥ ٤

---

٤ (أ) إذا كانت : س = $\sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٧} + \sqrt{٥}}$ أوجد قيمة : $\frac{س + ص}{س ص}$

(ب) أوجد مستخدمًا خط الأعداد : [-٢ ، ٣] ∪ [١ ، ٥[

٥ (أ) أوجد فى أبسط صورة : $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥} + \sqrt{١٢٥}$

(ب) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٠ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠



٥ إدارة طوخ – توجيه الرياضيات - الفترة الصباحية – محافظة القليوبية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة :

[١] إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، ٥ ، ٣ ، س + ١ هو ٥ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

[٢] مكعب طول حرفه $\sqrt{٢}$ سم فإن حجمه .... سم^٣

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢$\sqrt{٢}$ (د) ٤

[٣] إذا كان الزوج المرتب (٣ ، ٥) يحقق العلاقة : أ س + ص = ٢ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) –١ (د) ٥

[٤] المعكوس الجمعى للعدد $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ هو ....

(أ) ٣ (ب) –$\sqrt{٣}$ (جـ) –٣ (د) ٢$\sqrt{٣}$

[٥] الوسيط للقيم : ٤ ، ٢ ، ٥ ، ٩ ، ١ هو ....

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

---

٢ أكمل العبارات الآتية :

[١] ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات هو ....

[٢] [٢ ، ٧] –]٢ ، ٧[= ....

[٣] كرة طول نصف قطرها ٣ سم فإن حجمها .... π سم^٣

[٤] $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٤ + ...

٣ (أ) اختصر لأبسط صورة المقدار : $\sqrt{٥٠} + ٢\sqrt{٨} - ١٠\sqrt{\frac{١}{٢}}$

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $-١ \leq ٢ س - ٧ \leq ٣$ على صورة فترة.

---

٤ (أ) أثبت أن النقط : (١ ، ١) ، (٥ ، −١) ، (−٣ ، ٣) تقع على استقامة واحدة.

(ب) إذا كانت : $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

أوجد القيمة العددية للمقدار : $(س - ص)^٢$

---

٥ (أ) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها. أوجد ارتفاعها إذا علم أن حجمها يساوى ٢٧ π سم^٣

(ب) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥ −	١٥ −	٢٥ −	٣٥ −	٤٥ −	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

٦ إدارة قويسنا توجيه الرياضيات — محافظة المنوفية



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} = ...$

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

[٢] $[-٢ ، ٢] \cap ص_+ = ...$

(أ) {١ ، ٢} (ب) [١ ، ٢] (جـ) {٠ ، ١ ، ٢} (د) [−٢ ، ١]

[٣] إذا كان (أ ، ٢ أ) يحقق العلاقة : س + ص = ١٥ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ١

[٤] ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات ....

(أ) موجب. (ب) سالب. (جـ) صفر. (د) غير معرف.

[٥] الوسيط للقيم : ٢٧ ، ٤٥ ، ١٩ ، ٢٤ ، ٢٨ هو ....

(أ) ٢٤ (ب) ٢٧ (جـ) ٢٨ (د) ٤٥

٢ أكمل ما يأتى :

[١] العدد التالى فى النمط : $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ هو ....

[٢] إذا كان : $\sqrt[٣]{س} = -\sqrt{٢٥}$ فإن : س = ...

[٣] ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ١) ، (٦ ، ٢) هو ....

[٤] إذا كان المنوال للقيم : ١٢ ، ٧ ، س + ١ ، ١٢ ، ٧ هو ٧ فإن : س − ١ = ...

---

٣ (أ) إذا كانت : س = $\sqrt{٥}$ − ٢ ، س ص = ١ **برهن أن :** س ، ص مترافقان

ثم أوجد قيمة : $س^٢$ + ٢ س ص + $ص^٢$

(ب) **أثبت أن :** $\sqrt[٣]{٥٤} \times \sqrt[٣]{١٦} \div \left(\sqrt[٣]{٤} \times ٦\right) = ١$

---

٤ (أ) **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة :** ٣ < ٣ − ٥ س < ١٣

(ب) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٥٢ $سم^٢$ وطول قطر قاعدتها ٨ سم. أوجد حجمها.

---

٥ (أ) إذا كانت النقط (٤ ، ١) ، (−٢ ، ٧) ، (٣ ، ك) تقع على استقامة واحدة فما قيمة ك ؟

(ب) **أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :**

المجموعات	١٠ −	٣٠ −	٥٠ −	٧٠ −	٩٠ −	المجموع
التكرار	٤	٦	٨	٧	٥	٣٠

٧ إدارة طلخا – توجيه الرياضيات - الفترة المسائية — محافظة الدقهلية



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

[١] $\sqrt[٣]{٦٤} = \sqrt{..............}$

[٢] ط ∩ [−٣ ، ٣] = ...

[٣] إذا كانت : س < $\sqrt{٧}$ < س + ١ حيث س عدد صحيح فإن : $س^٢$ = ...

[٤] إذا كان ميل المستقيم الذى يحوى النقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ص) يساوى ٢
فإن : ص = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] كرة حجمها $\frac{٤}{٣}$ π سم^{٣} فإن طول قطرها .... سم.

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

[٢] مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٥}$ س − ١ = ٤ فى ح هى ....

(أ) $\{\sqrt{٥}\}$ (ب) $\{-\sqrt{٥}\}$ (جـ) $\{\frac{١}{\sqrt{٥}}\}$ (د) $\{\frac{-١}{\sqrt{٥}}\}$

[٣] إذا كان (−٢ ، أ) يحقق العلاقة : ص − س − ٤ = ٠ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٤

[٤] الوسيط للقيم : ٢ ، ٧ ، ٩ ، ٣ ، ٥ ، ٨ هو ....

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) ٦

[٥] إذا كان المنوال للقيم : س − ١ ، س ، س − ١ هو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

---

٣ **(أ)** أسطوانة دائرية قائمة حجمها يساوى ٢٧ π سم^{٣} ، فإذا كان ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها فأوجد ارتفاعها.

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة الآتية مبينًا فترة الحل على خط الأعداد :

−٢ < ٣ س + ٧ > ١٠ حيث س ∈ ح

---

٤ **(أ)** إذا كانت : س = $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ ، وكانت ص مرافق لـ س

أوجد قيمة المقدار : س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢}

(ب) اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{١٢} - \sqrt[٣]{٥٤} + ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} - ٦\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

---

٥ **(أ) مثل بيانيًا العلاقة :** ٢ س + ٣ ص = ٦ وإذا كان المستقيم يقطع محور السينات فى أ ومحور الصادات فى ب أوجد مساحة Δ أ ب و حيث و نقطة الأصل.

(ب) أوجد قيمة ك ثم أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥ −	١٥ −	٢٥ −	٣٥ −	٤٥ −	المجموع
التكرار	٧	ك	١٢	١٣	٨	٥٠

٨ إدارة فايد توجيه الرياضيات — محافظة الإسماعيلية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل :

[١] مكعب حجمه ٢١٦ سم^{٣} فإن طول حرفه .... سم.

[٢] إذا كان الزوج المرتب (٢ ، −١) يحقق العلاقة : س − ص = أ فإن : أ = ...

[٣] إذا كان المنوال للقيم : ٥ ، ٩ ، ٥ ، ٧ + أ ، ٩ هو ٩ فإن : أ = ...

[٤] الحد الجبرى ٣^{٢} س^{٢} ص^{٣} من الدرجة ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$ هو ....

(أ) ٥$\sqrt{٣}$ (ب) ٣$\sqrt{٥}$ (جـ) ٣$\sqrt{٣}$ (د) ٥$\sqrt{٥}$

[٢] [١ ، ٥] −]١ ، ٥[= ....

(أ) {١ ، ٥} (ب) [١ ، ٥[(جـ) {١} (د) {٥}

[٣] $(\sqrt[٣]{-٢})^{٢} + \sqrt[٣]{٣٢}$ = ...

(أ) ٣$\sqrt[٣]{٤}$ (ب) ٥$\sqrt[٣]{٢}$ (جـ) ٣$\sqrt[٣]{٢}$ (د) ٤$\sqrt[٣]{٤}$

[٤] الوسيط للقيم : ٧ ، ٦ ، ٨ ، ٤ ، ٥ هو ....

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٥

[٥] ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) غير معرف.

---

٣ (أ) إذا كانت : س = $\sqrt{٥}$ − ٢ ، ص مرافق س **أوجد القيمة العددية للمقدار :**

س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة فى ح ومثل الحل على خط الأعداد : ٢ س − ٣ ≥ ١

٤ (أ) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، −٣) ، (−١ ، ٥)

(ب) اختصر : $6\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{18} + \sqrt{8}$

---

٥ (أ) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم وطول نصف قطر قاعدتها ٥ سم.

أوجد المساحة الجانبية بدلالة π

(ب) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	٢ −	٤ −	٦ −	٨ −	١٠ −	المجموع
التكرار	٣	٢	٢	١	٢	١٠



٩ إدارة كفر سعد – توجيه الرياضيات – محافظة دمياط

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المحايد الضربي فى ن هو ....

(أ) الواحد (ب) الصفر (جـ) −١ (د) ٢

[٢] إذا كانت : (ك − ٥) ص^{٢} + س + ٦ ص − ٨ = صفر علاقة خطية

فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) −٨

[٣] الحد الجبرى : ٥ س^{٣} ص^{٤} من الدرجة ....

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

[٤] إذا كانت النقطة (ك ، −٥) تحقق العلاقة : س − ٢ ص = ٦ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٦ (د) ١

[٥] المنوال للقيم : ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٦ هو ....

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

---

٢ أكمل ما يلى لتحصل على عبارات صحيحة :

[١] متوازى مستطيلات أبعاده ٢ سم ، ٣ سم ، ٥ سم فإن حجمه .... سم^{٣}

[٢] إذا كانت نقطة تقاطع المنحنيين المتجمع الصاعد والهابط هى (٣٠ ، ٤٠)
فإن مجموع التكرارات ....

[٣] إذا كانت : س < $\sqrt{٧}$ < س + ١ ، س عدد صحيح فإن : س = ...

[٤] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (س ، ص) ، (٧ ، ٥) ميله غير معرف
فإن : س = ...

٣ (أ) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ١٥٤٠ سم^{٣} ، ارتفاعها ١٠ سم
أوجد طول نصف قطر قاعدتها $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(ب) إذا كانت : س =]-٣ ، ٣] ، ص = [-١ ، ٦] فأوجد باستخدام خط الأعداد :

[١] س ∪ ص [٢] س - ص [٣] س ∩ ص

٤ (أ) اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{٢٧} - \sqrt{١٢} - ٣\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{١٨}$

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : -٣ < ٤ س - ٧ < ٥ ومثلها على خط الأعداد.

٥ (أ) إذا كانت النقط : (ك ، ١) ، (-٢ ، ٧) ، (٣ ، ٢) تقع على استقامة واحدة
فأوجد قيمة : ك

(ب) أوجد الوسط الحسابى للجدول التكرارى التالى :

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

١٠ إدارة قلين
توجيه الرياضيات
محافظة كفر الشيخ



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة :

[١] إذا كانت : س تمثل عددًا سالبًا فأى من الآتى يمثل عددًا موجبًا ؟

(أ) س^{٢} (ب) س^{٣} (جـ) ٢ س (د) $\frac{س}{٢}$

[٢] العدد غير النسبى فى الأعداد التالية هو ....

(أ) $\sqrt{\frac{١}{٤}}$　(ب) $\sqrt[٣]{٨}$　(جـ) $\sqrt{\frac{٤}{٩}}$　(د) $\sqrt{٢}$

[٣] إذا كانت : س = $\sqrt{٢}$ − ١ ، ص = $\frac{١}{\sqrt{٢} - ١}$ فإن : س ص = ...

(أ) $\sqrt{٢}$ − ١　(ب) ١　(جـ) $\sqrt{٢}$　(د) $\sqrt{٢}$ + ١

[٤] مكعب حجمه ٢ $\sqrt{٢}$ سم^{٣} فإن طول حرفه .... سم.

(أ) $\sqrt{٢}$　(ب) ٢　(جـ) ٨　(د) ١٢

[٥] إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، أ ، ٥ ، ٣ هو ٣ فإن : أ = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٥　(د) ٤

---

٢ أكمل :

[١] مجموعة حل المعادلة : س − ١ = $\sqrt{٣}$ فى ن هى ....

[٢] مجموع الأعداد الحقيقية فى الفترة [−٥ ، ٥] يساوى ....

[٣] الوسيط للقيم : ٩ ، ٤ ، ٨ ، ١ ، ٣ هو ....

[٤] ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (−٣ ، ٣) ، (٢ ، ٤) يساوى ....

---

٣ (أ) إذا كانت : س =]− ∞ ، ٢] ، ص = [−١ ، ٥] **أوجد مستعينًا بخط الأعداد :**

س − ص ، س ∩ ص

(ب) **اختصر :** ٢ $\sqrt{٥}$ + ٤ $\sqrt{٢٠}$ − ٥ $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

---

٤ (أ) كرة حجمها ٥٦٢,٥ π سم^{٣} أوجد مساحة سطحها بدلالة π

(ب) **أوجد مجموعة حل المتباينة الآتية فى ح :** ٥ س − ٣ ≥ ٢ س + ٩

---

٥ (أ) **على الشبكة التربيعية مثل بيانيًا العلاقة :** ص + ١ = صفر

(ب) **أوجد الوسط الحسابى للتوزيع الآتى :**

المجموعات	٥ −	١٥ −	٢٥ −	٣٥ −	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

١١ إدارة ناصر – توجيه الرياضيات – محافظة بنى سويف

محافظة بنى سويف

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

[١] $\sqrt{٩} + \sqrt[٣]{-٨} =$ ....

[٢] الزوج المرتب (٢ ، ....) يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥

[٣] $\{٣ ، ٧\} -]٣ ، ٧[=$ ....

[٤] الحد الجبرى ٣ $س^{٢}$ $ص^{٣}$ من الدرجة ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{أ^{٢}} =$ ....

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ± أ (د) |أ|

[٢] المستقيم العمودى على محور الصادات ميله ....

(أ) موجب. (ب) سالب. (جـ) صفر. (د) غير معرف.

[٣] ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) هو ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) ١ (د) −١

[٤] المنوال للقيم : ٣ ، ٤ ، ١٠ ، ٤ هو ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

[٥] إذا كان ترتيب الوسيط لتوزيع تكرارى هو ٥٠ فإن مجموع التكرارات = ...

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ٥

---

٣ (أ) إذا كانت : س = [−٣ ، ٥[، ص =]٠ ، ٦] أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

[١] س ∩ ص [٢] س ∪ ص

(ب) إذا كانت : س = $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، ص = $\frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$

أثبت أن : س ، ص عددان مترافقان ثم أوجد قيمة المقدار : $\frac{س + ص}{س ص + ١}$

٤ **(أ) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = س + ٢**

(ب) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها وحجمها ٦٤ π سم^3 أوجد ارتفاع الأسطوانة.

---

٥ **(أ) أوجد فى ح على صورة فترة مجموعة حل المتباينة : ٣ ≥ ٢ س − ١ > ٥**

(ب) الجدول التالى يبين درجات ٢٠ تلميذًا فى مادة الرياضيات :

الدرجات	٢ −	٤ −	٦ −	٨ −	١٠ −	المجموع
عدد التلاميذ	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

١٢ إدارة القوصية
توجيه الرياضيات - الفترة الصباحية
محافظة أسيوط



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ك) ، (٤ ، ٥) يوازى محور السينات فإن : ك = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

٢ أكبر عدد صحيح غير موجب هو ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) −٤

٣ إذا كان الوسيط لمجموعة القيم : ك + ١ ، ك + ٤ ، ك + ٢ ، ك + ٥ ، ك + ٣ هو ١٣ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ١٣

٤ مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{3}$ س − ١ = ٢ فى ح هى ....

(أ) $\{2\sqrt{3}\}$ (ب) $\{\sqrt{3}\}$ (جـ) $\{\sqrt{2}\}$ (د) $\{2\sqrt{2}\}$

٥ | −٢ | + | −٤ | + | ٥ | = ...

(أ) ٦ (ب) −١١ (جـ) | −١١ | (د) صفر

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كان المنوال للقيم : ١٢ ، ٧ ، ـس + ١ ، ١٢ ، ٧ هو ٧ فإن : ـس = ...

[٢] إذا كان : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة فإن : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل ....

[٣] [−٢ ، ٣] ∩]٢ ، ٤[= ....

[٤] إذا كان : (٢ ، −٥) يحقق العلاقة : ٣ ـس − ص + حـ = صفر
فإن : حـ = ...

---

٣ (أ) إذا كانت : ـس = $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، ص = $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ **أثبت أن : ـس ، ص مترافقان.**

ثم أوجد قيمة : ـس^{٢} + ٢ ـس ص + ص^{٢}

(ب) كرة حجمها $\frac{٥٠٠}{٣}$ π سم^{٣} أوجد طول قطرها.

---

٤ (أ) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ٢ ـس = ١ − ص ثم مثلها بيانيًا.

(ب) اختصر إلى أبسط صورة : $\sqrt{٢٧} + \frac{١}{٣}\sqrt[٣]{٢٧} - ٩\sqrt{\frac{١}{٣}} - ١$

---

٥ (أ) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

٢ − ٥ ـس < ٢ ـس + ٩

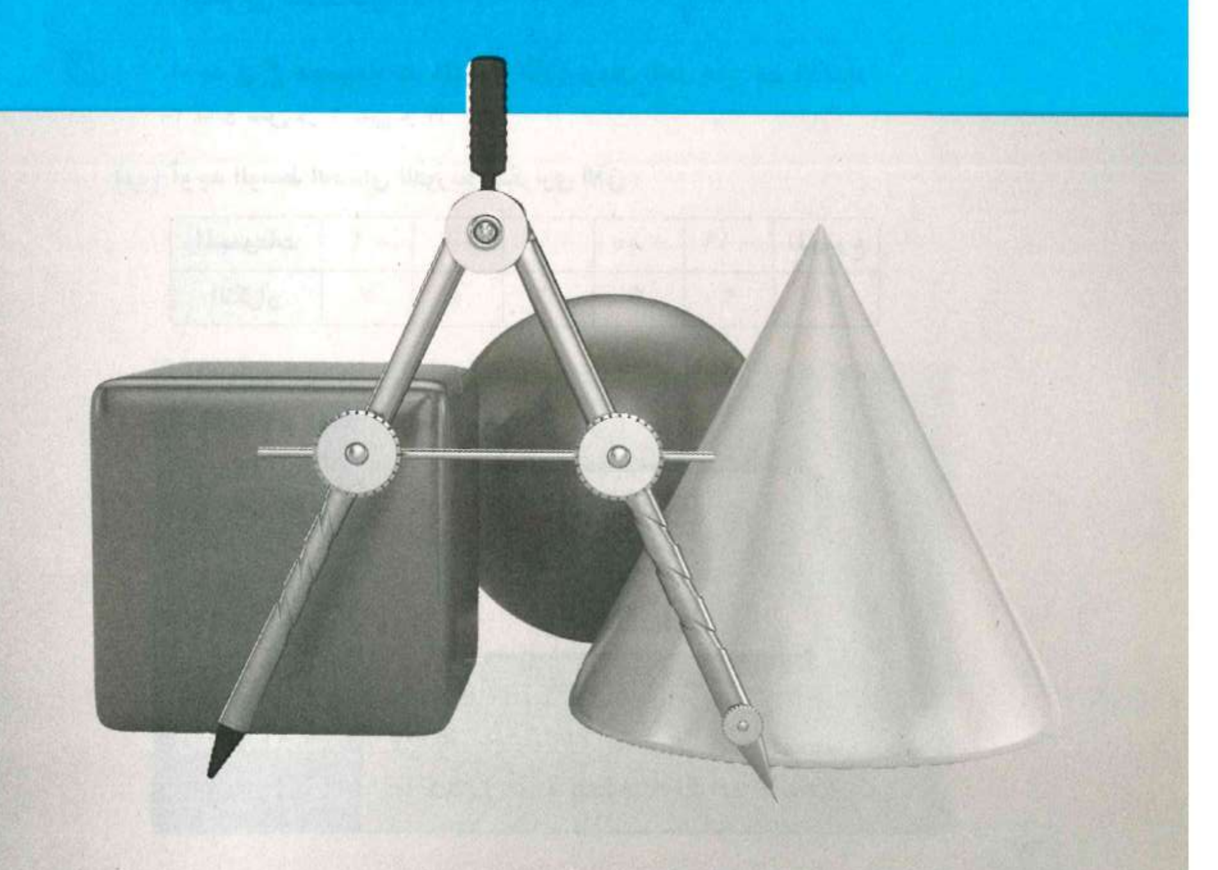
(ب) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٣ −	٧ −	١١ −	١٥ −	١٩ −	المجموع
التكرار	٧	٥	٣	٣	٢	٢٠



ثانيًا

الهندسـة



الاختبارات التراكمية

فى الهندســــــة

من امتحانات الإدارات التعليمية



اختبار تراكمى 1 على الدرس الأول الوحدة الرابعة

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ ، $\overline{أ ء}$ متوسط فإن : أ ء = ...

(مطوبس - كفر الشيخ - ١٧)

(أ) ٢ أ م (ب) $\frac{٢}{٣}$ م ء (جـ) $\frac{٣}{٢}$ أ م (د) ٤ م ء

2 نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها من جهة القاعدة بنسبة ٤ : ....

(بنى مزار - المنيا - ١٩)

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ١ (د) ٤

3 فى الشكل المقابل :

ب م = ٦ سم

فإن : م هـ = ... سم (التبين - القاهرة - مجمع ٢١)

(أ) ٣ (ب) ٦

(جـ) ٧ (د) ٩

4 مثلث أ ب حـ فيه : $\overline{أ ء}$ متوسط ، م نقطة تلاقى متوسطاته فإن : $(أ م)^{٢}$ = ... $(أ ء)^{٢}$

(بلبيس - الشرقية - ١٨)

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{١}{٢}$

---

2 أكمل ما يأتى :

1 نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة الرأس.

(قطور - الغربية - ٢٢)

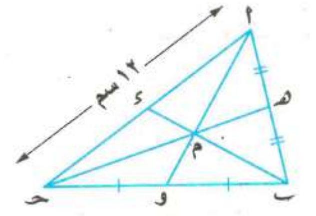
2 $\triangle$ أ ب حـ فيه : $\overline{أ ء}$ متوسط ، م نقطة تقاطع المتوسطات ، م ء = ٢ سم

فإن : أ م = ... سم. (طوخ - القليوبية - ٢٣)

3 عدد متوسطات المثلث المختلف الأضلاع يساوى .... (روض الفرج - القاهرة - ٢٣)

4 متوسطات المثلث تتقاطع جميعها فى .... (كفر شكر - القليوبية - ٢٢)

٣ **فى الشكل المقابل :**



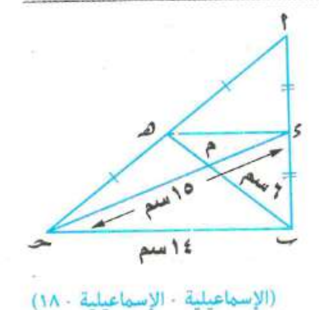
هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، أ حـ = ١٢ سم

أوجد بالبرهان : طول $\overline{\text{أ ء}}$ (العمرانية - الجيزة - ٢٠)

---

٤ **فى الشكل المقابل :**



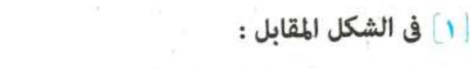
(الإسماعيلية - الإسماعيلية - ١٨)

م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

، ب م = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم

، ء حـ = ١٥ سم

أوجد : محيط Δ م ء هـ



اختبـــار تراكمـي ٢ حتى الدرس الثانى الوحدة الرابعة

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

[١] **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ق (∠ أ حـ ب) = °٣٠

، أ ب = ٥ سم فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠

(جـ) ٢,٥ (د) ١٥ (الشيخ زايد - الجيزة - مجمع ٢١)



[٢] إذا كان : $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط فى المثلث أ ب حـ ، ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ فإن : ....

(السنبلاوين - الدقهلية - ١٧)

(أ) ق (∠ أ ب حـ) = °٩٠ (ب) ق (∠ ب أ حـ) = °٩٠

(جـ) ق (∠ أ ب حـ) = °٣٠ (د) ق (∠ أ حـ ب) = °٩٠

[٣] إذا كانت : م نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ ، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن : م ء : أ ء = ... (المحمودية - البحيرة - ١٩)

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ١ : ٣ (د) ٣ : ٢

٤ مستطيل تقاطع قطراه فى م ، طول قطره ٦ سم فإن طول المتوسط $\overline{أم}$ يساوى .... (وسط - الإسكندرية - ١٦)

(أ) ١ سم (ب) ٢ سم (جـ) ٣ سم (د) ٤ سم

---

٢ أكمل ما يأتى :

١ فى المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° يساوى ....
(النزهة - القاهرة - ٢٢)

٢ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٢ : .... من جهة القاعدة.
(شرق الزقازيق - الشرقية - ٢٢)

٣ إذا كانت م نقطة تقاطع المتوسطات فى Δ أ ب حـ وكان : $\overline{أ ء}$ متوسط طوله ٦ سم فإن : أ م = ... سم. (الحوامدية - الجيزة - ٢٣)

٤ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم فإن طول المتوسط المرسوم من نقطة ب إلى $\overline{أ حـ}$ = ... (شبين الكوم - المنوفية - ٢٣)

---

٣ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب
، ق (∠ أ حـ ب) = ٦٠°
، هـ منتصف $\overline{أ حـ}$ ، ء هـ = ب حـ
أثبت أن : ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°

(تلا - المنوفية - ١٧)

---

٤ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب
، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ء منتصف $\overline{ب حـ}$
، هـ منتصف $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{أ ء} \cap \overline{ب هـ} = \{م\}$
، فإذا كان : أ ب = ١٢ سم ، أ ء = ١٥ سم
فأوجد بالبرهان :

١ طول $\overline{أ هـ}$ ٢ طول $\overline{م هـ}$ ٣ محيط Δ أ م هـ (منيا القمح - الشرقية - ١٦)

اختبـار تراكمـى ٣ حتى الدرس الثالث الوحدة الرابعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، ء هـ // حـ أ

فإن : ق (∠ ء) = ... (دمياط - دمياط - ١٧)

(أ) ١٠٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

[٢] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة .... من جهة القاعدة.

(البدرشين - الجيزة - ١٦)

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ٣ : ١ (د) ١ : ٣

[٣] أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ حـ = ٢٠ سم ، ء منتصف أ حـ

فإن : ب ء = ... سم (بنها - القليوبية - ١٩)

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٥

[٤] فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

فإن : ق (∠ حـ) = ... (منيا القمح - الشرقية - ١٦)

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين .... (النزهة - القاهرة - ٢٢)

[٢] أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، أ حـ = ٨ سم

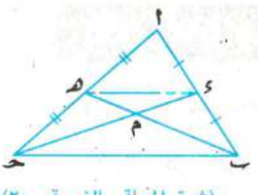
فإن : أ ب = ... سم. (أوسيم - الجيزة - ٢٣)

[٣] إذا كان قياس زاوية الرأس فى مثلث متساوى الساقين يساوى ٨٠° ، فإن قياس إحدى زاويتى القاعدة يساوى ....° (النزهة - القاهرة - ٢٣)

[٤] قياس الزاوية الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....°

(العاشر من رمضان - الشرقية - ٢٣)

٣ في الشكل المقابل :



بهـ ، حـ ء متوسطان في المثلث أ ب حـ

متقاطعان في نقطة م ، محيط Δ م ء هـ = ١٢ سم

احسب بالبرهان : محيط Δ م ب حـ

(شرق المحلة - الغربية - ٢٠)

---

٤ في الشكل المقابل :

ب $\in$ أ حـ ، Δ أ ب ء متساوي الأضلاع

، هـ ب = هـ حـ ، ق (∠ هـ) = ٨٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ء ب هـ)

(دمياط - دمياط - ١٨)

اختبــار تراكمـي ٤ حتى الدرس الرابع الوحدة الرابعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المثلث الذي فيه قياسا زاويتين ٤٢° ، ٦٩° يكون ....

(غرب القاهرة - القاهرة - مجمع ٢١)

(أ) متساوي الساقين. (ب) متساوي الأضلاع.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

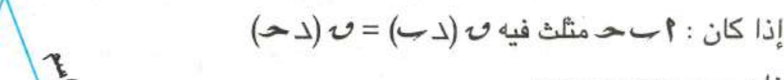
[٢] طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس الزاوية القائمة

يساوي .... طول الوتر.

(الواسطى - بني سويف - ١٧)

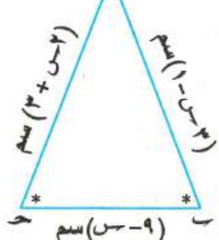
(أ) نصف (ب) ضعف (جـ) ربع (د) ثلث

[٣] في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

فإن : س = ...



(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$

(جـ) ٢ (د) ٤

[٤] أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ب حـ فإن : ∠ حـ ....

(يوسف الصديق - الفيوم - ٢٠)

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين ٦٠° فإن المثلث يكون ....

(أوسيم - الجيزة - ٢٣)

[٢] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة .... : .... من جهة القاعدة.

(وسط القاهرة - القاهرة - ٢٣)

[٣] إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية يساوى ٤٥° كان المثلث ....

(غرب الزقازيق - الشرقية - ٢٣)

[٤] فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\overline{أ ء}$ متوسطًا ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، أ م = ٦ سم فإن : م ء = ... سم.

(قلين - كفر الشيخ - ٢٢)

---

٣ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

فإذا كانت ن $\in \overline{ب م}$ بحيث : ب ن = ٢ ن م

، $\overleftrightarrow{حـ ن} \cap \overline{أ ب} = \{هـ\}$

فأثبت أن : هـ م = $\frac{1}{2}$ ب حـ

(نجع حمادى - قنا - ١٨)

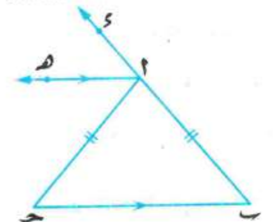
---

٤ فى الشكل المقابل :

ء $\in \overrightarrow{ب أ}$ ، أ ب = أ حـ ، $\overrightarrow{أ هـ} // \overline{ب حـ}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف $\angle$ ء أ حـ

(منيا القمح - الشرقية - ١٦)



اختبـار تراكمى ٥ حتى الدرس الخامس الوحدة الرابعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] عدد متوسطات المثلث المتساوى الساقين .... (الفشن - بنى سويف - ١٨)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

[٢] المثلث الذى ليس له محاور تماثل هو مثلث .... (الإسماعيلية - الإسماعيلية - ٢٠)

(أ) متساوى الساقين. (ب) مختلف الأضلاع.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

[٣] إذا كان : $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور تماثل $\overline{و ء}$ فإن : $\frac{أ ء}{أ و}$ = ... (نبروه - الدقهلية - ٢٠)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ٢

[٤] أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع ، س نقطة تقاطع محاور تماثله ، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ يقطع $\overline{\text{ب ح}}$ فى ء فإذا كان : ء س = ٥ سم فإن : أ س = ... (الشيخ زايد - الجيزة - ١٧)

(أ) ١٠ سم (ب) ١٥ سم (ج) ٢,٥ سم (د) ٧,٥ سم

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن .... (قفط - قنا - ٢٢)

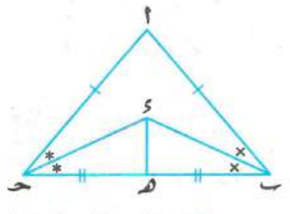
[٢] $\triangle$ أ ب ح له محور تماثل واحد ، ق (∠ أ) = ١٢٠° فإن : ق (∠ ب) = ... (البحيرة - ٢٢)

[٣] $\triangle$ أ ب ح إذا كان : أ ب = أ ح ، ق (∠ أ) = ٣ س ، ق (∠ ب) = ٦ س فإن : س = ...° (قويسنا - المنوفية - ٢٣)

[٤] المستقيم المار برأس المثلث المتساوى الساقين وعموديًا على القاعدة ينصف القاعدة و .... (شرق المحلة - الغربية - ٢٣)

---

٣ فى الشكل المقابل :



أ ب = أ ح ، $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف زاوية أ ب ح

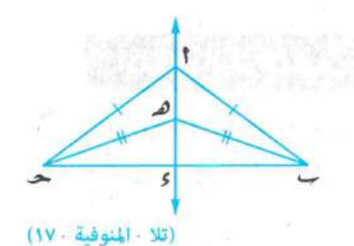
، $\overrightarrow{\text{ح ء}}$ ينصف زاوية أ ح ب

، هـ منتصف $\overline{\text{ب ح}}$

أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ب ح}}$ (الشيخ زايد - الجيزة - ١٧)

---

٤ فى الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث فيه : أ ب = أ ح = ١٠ سم

، ب هـ = هـ ح ، ب ح = ١٦ سم

، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}} \cap \overline{\text{ب ح}} = \{\text{ء}\}$

أوجد : طول $\overline{\text{أ ء}}$ (تلا - المنوفية - ١٧)

اختبار تراكمى ٦ حتى الدرس الأول الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : س − ع > ص − ع فإن : س .... ص (سوهاج - سوهاج - ١٦)

(أ) = (ب) < (ج) > (د) ≥

[٢] إذا كانت : حـ ∋ محور تماثل $\overline{أب}$ فإن : أحـ − ب حـ = ...

(أبو النمرس - الجيزة - ١٩)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٢

[٣] إذا كان المثلث : أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أب = $\frac{1}{2}$ أحـ

فإن : ق (∠ أ) = ... (إدكو - البحيرة - ١٨)

(أ) ٤٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ٦٠°

[٤] فى الشكل المقابل :

حـ ∋ $\overleftrightarrow{أب}$ ، ء ∋ $\overleftrightarrow{أب}$

، ق (∠ أ حـ هـ) > ق (∠ ب ء و)

فإن : ق (∠ هـ حـ ء) .... ق (∠ و ء حـ)

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≥

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] مثلث متساوى الساقين قياس زاوية رأسه ٨٠° فإن قياس إحدى زاويتى قاعدته = ...° (أبوتيج - أسيوط - ٢٢)

[٢] فى الشكل المقابل :

حـ ∋ $\overleftrightarrow{أب}$ ، ء ∋ $\overleftrightarrow{أب}$ إذا كان : أحـ > ب ء

فإن : أب .... حـ ء (قطور - الغربية - ٢٣)

[٣] منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين .... (المنزلة - الدقهلية - ٢٢)

[٤] فى المثلث س ص ع إذا كان : ق (∠ س) = ٤٠° ، ق (∠ ع) = ١٠٠°

فإن عدد محاور تماثله يساوى .... (ميت غمر - الدقهلية - ٢٣)

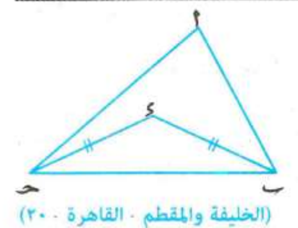
---

٣ فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ حـ ب)

، ب ء = حـ ء

أثبت أن : ق (∠ أ ب ء) > ق (∠ أ حـ ء)



(الخليفة والمقطم - القاهرة - ٢٠)

٤ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه :

أ ب = أ حـ ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

، ق (∠ب أ ء) = ٢٥° ، ب حـ = ٤ سم

أوجد :

[١] ق (∠ء أ حـ)　　[٢] طول $\overline{ء حـ}$

(بنها - القليوبية - ١٨)

أ
٢٥°
حـ　ء　ب
٤ سم

اختبــار تراكمـى ٧ حتى الدرس الثانى الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المثلث س ص ع فيه : $\overline{س ص}$ أصغر الأضلاع طولًا فإن أصغر الزوايا قياسًا هى .... (وسط - الإسكندرية - ١٨)

(أ) س　(ب) ص　(جـ) ع　(د) غير ذلك

[٢] إذا كان المثلث أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ فإن الزاوية الخارجة عند الرأس حـ تكون .... (شبين الكوم - المنوفية - ٢٢)

(أ) مستقيمة.　(ب) حادة.　(جـ) منفرجة.　(د) منعكسة.

[٣] مثلث له ثلاثة محاور تماثل فإن قياس الزاوية الخارجة عن أحد رؤوسه يساوى .... (شبين القناطر - القليوبية - ١٩)

(أ) ٩٠°　(ب) ٨٠°　(جـ) ١٢٠°　(د) ٦٠°

[٤] المثلث أ ب حـ إذا كان : أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٦ سم

فإن : ق (∠ب) .... ق (∠حـ) (الرحمانية - البحيرة - مجمع ٢١)

(أ) $<$　(ب) $>$　(جـ) $=$　(د) $\equiv$

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله .... (شرق الزقازيق - الشرقية - ٢٢)

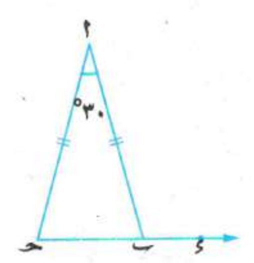
[٢] إذا كان : أ تقع على محور تماثل $\overline{س ص}$ فإن : $\overline{أ س}$ .... $\overline{أ ص}$ (شربين - الدقهلية - ٢٣)

[٣] إذا كان Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ١٠٠° فإن أكبر أضلاعه طولًا هو ……………

(السويس - السويس - ٢٣)

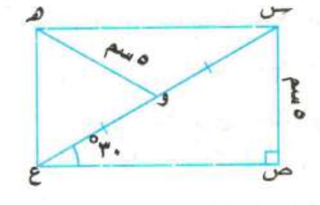
[٤] فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب ء) = …………… ° (قطور - الغربية - ٢٢)



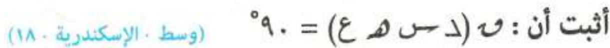
---

٣ فى الشكل المقابل :



ق (∠ ص) = ٩٠° ، ق (∠ س ع ص) = ٣٠°

، س ص = هـ و = ٥ سم ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$



أثبت أن : ق (∠ س هـ ع) = ٩٠° (وسط - الإسكندرية - ١٨)

---

٤ فى الشكل المقابل :

من البيانات الموجودة على الرسم

أثبت أن :

ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ ء حـ) (يوسف الصديق - الفيوم - ١٦)

اختبــار تراكمى ٨ حتى الدرس الثالث الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] النسبة بين طول الوتر وطول المتوسط الخارج من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية تساوى …………… (شرق الزقازيق - الشرقية - ٢٢)

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٣ (د) ٣ : ١

[٢] مثلث قياسا زاويتين فيه : ٤٨° ، ٨٤° يكون نوعه …………… (الحامول - كفر الشيخ - مجمع ٢١)

(أ) متساوى الساقين. (ب) متساوى الأضلاع.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

[٣] إذا كان : $\triangle$ ا ب حـ منفرج الزاوية فى حـ فإن : ب حـ .... ا ب

(المنشأة - سوهاج - مجمع ٢١)

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\leq$

[٤] أكبر الأضلاع طولًا فى المثلث س ص ع الذى فيه :

ق (∠ ص) = ق (∠ س) + ق (∠ ع) هو .... (الواسطى - بنى سويف - ١٧)

(أ) $\overline{\text{س ص}}$ (ب) $\overline{\text{س ع}}$ (جـ) $\overline{\text{ص ع}}$ (د) غير ذلك.

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] محور تماثل القطعة المستقيمة هو .... (المنزلة - الدقهلية - ٢٢)

[٢] فى المثلث ا ب حـ إذا كان : ا ب $<$ ب حـ ، ا ب $>$ ا حـ

فإن أصغر زاوية من زواياه هى .... (قطور - الغربية - ٢٢)

[٣] س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ٥٠° ، ق (∠ ص) = ٧٠°

فإن : س ع .... ص ع (الفشن - بنى سويف - ٢٣)

[٤] فى أى مثلث إذا اختلف قياسا زاويتين فإن الزاوية الأكبر فى القياس تقابل ....

(البحيرة - البحيرة - ٢٢)

---

٣ $\triangle$ ا ب حـ فيه : ق (∠ ا) = (٥ س + ٢)° ، ق (∠ ب) = (٦ س − ١٠)°

، ق (∠ حـ) = (س + ٢٠)° رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعديًا. (يوسف الصديق - الفيوم - ٢٠)

---

٤ فى الشكل المقابل :

س ، ص منتصفا $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ على الترتيب

، س م $>$ ص م

أثبت أن : ق (∠ م ب حـ) $>$ ق (∠ م حـ ب)

(المحمودية - البحيرة - ١٩)

اختبار تراكمى ٩ حتى الدرس الرابع الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : ع ، ١٢ ، ٢ ع أطوال أضلاع مثلث فإن أكبر قيم ع الصحيحة = ...

(منوف - المنوفية - ١٦)

(أ) ١٢ (ب) ١١ (جـ) ٤ (د) ٣

[٢] إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن : .... (ساحل سليم - أسيوط - ١٧)

(أ) أ حـ < أ ب (ب) أ حـ < ب حـ

(جـ) أ ب < أ حـ (د) ب حـ < أ ب

[٣] أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب إذا كان : أ حـ = ٢٠ سم

فإن طول المتوسط المرسوم من ب يساوى .... سم (إدكو - البحيرة - ١٨)

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٥

[٤] مثلث له محور تماثل واحد وطولا ضلعين فيه ٣ سم ، ٨ سم فإن محيطه = ... سم

(تلا - المنوفية - ١٧)

(أ) ١٤ (ب) ١٩ (جـ) ١١ (د) ٢٤

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] بعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول .... المرسوم من هذه النقطة إلى هذا المستقيم المعلوم. (المحمودية - البحيرة - ٢١)

[٢] طول أى ضلع فى المثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين.

(المنتزه - الإسكندرية - ٢٢)

[٣] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٤ سم ، ٩ سم

فإن طول الضلع الثالث ∈] .... ، .... [(وسط القاهرة - القاهرة - ٢٣)

[٤] الزاوية الخارجة عند أى رأس فى المثلث المتساوى الأضلاع نوعها ....

(شبين القناطر - القليوبية - ٢٣)

---

٣ △ أ ب حـ فيه : ق(∠ أ) = ٥٠° ، ق(∠ ب) = ٧٠° رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

(غرب - الإسكندرية - ١٩)

---

٤ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث

أثبت أن :

أ ب < $\frac{1}{2}$ محيط △ أ ب حـ

(يوسف الصديق - الفيوم - ١٧)

الاختبارات الشهريـــة

فى الهندســـــــة

محتوى امتحان شهر أكتوبر

الوحدة الرابعة : متوسطات المثلث والمثلث المتساوى الساقين.

من الدرس رقم (١) متوسطات المثلث

إلى نهاية درس المثلث المتساوى الساقين.

محتوى امتحان شهر نوفمبر

- **الوحدة الرابعة : متوسطات المثلث والمثلث المتساوى الساقين.**

  من درس عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين إلى نهاية الوحدة.

- **الوحدة الخامسة : التباين.**

  حتى درس التباين.



الدرجة
١٠

اختبـار ١

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٣ درجات)

[١] عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

[٢] أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء منتصف $\overline{أحـ}$ فإن : ب ء = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ أ حـ (ب) أ حـ (جـ) $\frac{١}{٢}$ ب حـ (د) أ ب

[٣] Δ س ص ع متساوى الساقين فيه : ق (∠ ص) = ١٠٠° فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٥٠° (د) ٤٠°

---

٢ أكمل ما يأتى : (٣ درجات)

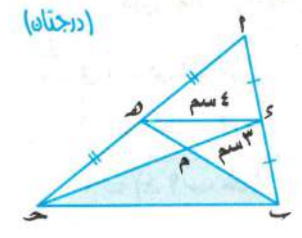
[١] طول الوتر فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول المتوسط الخارج من رأس القائمة.

[٢] قياس الزاوية الخارجة عن أى رأس من رؤوس المثلث المتساوى الأضلاع = ...°

[٣] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : ٢ من جهة القاعدة.

---

٣ فى الشكل المقابل : (درجتان)



إذا كانت : ء ، هـ منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

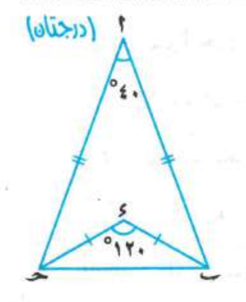
، $\overline{ب هـ} \cap \overline{ء حـ} = \{م\}$

، ء هـ = ٤ سم ، ء م = ٣ سم ، ب هـ = ٦ سم

أوجد : محيط Δ ب م حـ

---

٤ فى الشكل المقابل : (درجتان)



أ ب = أ حـ ، ء ب = ء حـ

، ق (∠ أ) = ٤٠°

، ق (∠ ء) = ١٢٠°

أوجد : ق (∠ أ ب ء)

الدرجة
10

اختبـــار ٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٣ درجات)

[١] إذا كانت : م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ ، $\overline{ب ء}$ متوسط
فإن : ب م : م ء = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٢ : ١ (جـ) ٣ : ١ (د) ١ : ٢

[٢] Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ب) = ٩٠° ، ق (∠حـ) = ٣٠° فإن : أ ب = ... أ حـ

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ضعف (د) $\frac{١}{٤}$

[٣] إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ٤٥° كان المثلث ....

(أ) منفرج الزاوية. (ب) حاد الزوايا. (جـ) قائم الزاوية. (د) متساوى الأضلاع.

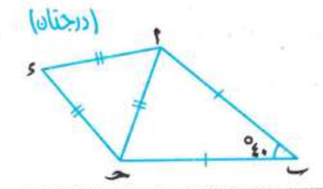
٢ أكمل ما يأتى : (٣ درجات)

[١] متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى ....

[٢] إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن ....

[٣] فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة ٦٥° فإن قياس زاوية رأسه يساوى ....

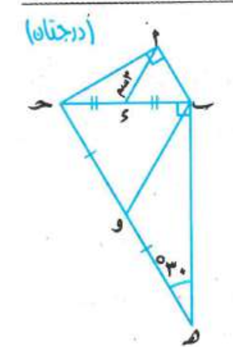
٣ فى الشكل المقابل : (درجتان)



أ ء = ء حـ = أ حـ ، أ ب = ب حـ

، ق (∠أ ب حـ) = ٤٠° أوجد : ق (∠ب أ ء)

٤ فى الشكل المقابل : (درجتان)



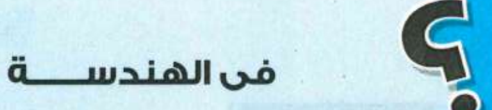
ق (∠ب أ حـ) = ق (∠حـ ب هـ) = ٩٠°

، ق (∠ب هـ حـ) = ٣٠°

، ء ، و منتصفا $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ هـ}$ على الترتيب

، أ ء = ٣ سم

أوجد : طول $\overline{ب و}$



فى الهندسـة



اختبـار ١

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٣ درجات)

[١] مثلث متساوى الساقين قياس إحدى زواياه الداخلة ٦٠° فإن عدد محاور تماثل هذا المثلث هو ....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

[٢] فى الشكل المقابل :

إذا كانت : حـ ، ب تنتميان إلى $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ بحيث : أب > ء حـ فإن : ء ب .... أ حـ

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≤

[٣] إذا كان : Δ أ ب حـ له محور تماثل واحد ، ق (∠ أ ب حـ) = ١٢٠°

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

---

٢ أكمل ما يأتى : (٣ درجات)

[١] المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ....

[٢] فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، ق (∠ ب) = ٦٠°

فإن عدد محاور تماثل Δ أ ب حـ هو ....

[٣] إذا كانت : م ∈ محور تماثل $\overline{\text{س ص}}$ فإن : $\frac{\text{٥ م س}}{\text{٤ م ص}}$ = ...

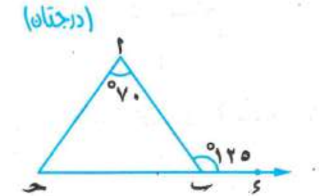
---

٣ فى الشكل المقابل : (درجتان)

ء ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، ق (∠ أ ب ء) = ١٢٥°

، ق (∠ أ) = ٧٠°

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.



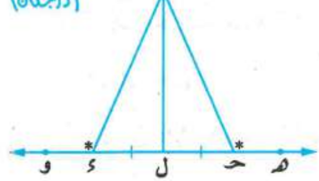
---

٤ فى الشكل المقابل : (درجتان)

حـ ل = ل ء

، ق (∠ ب حـ هـ) = ق (∠ ب ء و)

أثبت أن : $\overline{\text{ب ل}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$

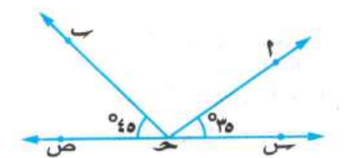


الدرجة ١٠

اختبار ٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٣ درجات)

[١] في الشكل المقابل :



إذا كانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، ق (∠ أ حـ س) = ٣٥°

، ق (∠ ب حـ ص) = ٤٥°

فإن : ق (∠ س حـ ب) .... ق (∠ أ حـ ص)

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) غير ذلك

[٢] إذا كانت : حـ ∈ محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$ فإن : أ حـ − ب حـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

[٣] في المربع أ ب حـ ء يكون $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ هو محور تماثل ....

(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) $\overline{\text{أ حـ}}$ (جـ) $\overline{\text{أ ء}}$ (د) $\overline{\text{حـ ء}}$

---

٢ أكمل ما يأتي : (٣ درجات)

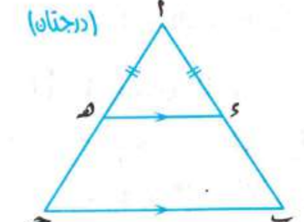
[١] منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ....

[٢] إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث قائم الزاوية ٤٥° كان المثلث ....

[٣] عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع هو ....

---

٣ في الشكل المقابل : (درجتان)



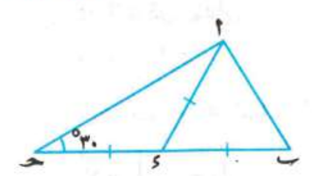
$\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، أ ء = أ هـ

برهن أن : Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

---

٤ في الشكل المقابل : (درجتان)



ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث ء أ = ء ب = ء حـ

، ق (∠ حـ) = ٣٠°

أثبت أن : Δ أ ب ء متساوي الأضلاع.

الأسئلة الهامة

فى الهندسـة

من امتحانات الإدارات التعليمية



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية يساوى .... (حلوان - القاهرة - ٢٠)

(أ) واحد. (ب) اثنين. (جـ) ثلاثة. (د) أربعة.

---

٢ طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر. (تلا - المنوفية - ٢٠)

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٤}$ (د) ٢

---

٣ طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس الزاوية القائمة يساوى .... طول الوتر. (الجمرك - الإسكندرية - ٢٠)

(أ) ثلث (ب) ربع (جـ) نصف (د) ضعف

---

٤ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث متساوى الأضلاع يساوى ....° (القناطر - القليوبية - ١٩)

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

---

٥ إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوى الساقين ٥٠° فإن قياس كل زاوية من زاويتى قاعدته يساوى .... (غرب الزقازيق - الشرقية - ١٩)

(أ) ٦٥° (ب) ٤٥° (جـ) ٥٥° (د) ٧٠°

---

٦ إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ٤٠° فإن قياس زاوية الرأس يساوى .... (الفشن - بنى سويف - ١٩)

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

---

٧ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° هو .... (العمرانية - الجيزة - ٢٠)

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٢

٨ المثلث الذى فيه قياسا زاويتين ٤٢° ، ٦٩° يكون .... (المحمودية - البحيرة - ١٩)

(أ) مختلف الأضلاع. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

---

٩ نقطة تقاطع المتوسطات للمثلث تقسم كلًا منها من جهة القاعدة بنسبة ....

(الدقى - الجيزة - ٢٠)

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ١ : ٣ (د) ٣ : ١

---

١٠ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٥ : .... من جهة الرأس.

(فاقوس - الشرقية - ٢٠)

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٠

---

١١ إذا كان $\overline{أ ء}$ متوسط فى △ أ ب حـ ، م نقطة تقاطع متوسطاته

فإن : أ ء = ... أ م (السنطة - الغربية - ١٩)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

---

١٢ △ أ ب حـ فيه : $\overline{أ ء}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإذا كان أ ء = ٩ سم

فإن : أ م = ... سم (منوف - المنوفية - ٢٠)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

---

١٣ مثلث قياسا زاويتين فيه ٤٨° ، ٨٤° فإن عدد محاور تماثله .... (السنطة - الغربية - ٢٠)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

---

١٤ إذا كانت س تقع على محور تماثل $\overline{أ ب}$ فإن : س أ .... س ب

(الفشن - بنى سويف - ١٩)

(أ) // (ب) ⊥ (جـ) = (د) ≡

١٥ مثلث س ص ع متساوى الساقين فيه : ق(∠س) = ١٠٠°

فإن : ق(∠ص) = ...

(الدقى - الجيزة - ٢٠)

(أ) ١٠٠°　(ب) ٨٠°　(جـ) ٦٠°　(د) ٤٠°

---

١٦ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ حـ = ١٢ سم ، ق(∠أ) = ٦٠°

فإن : طول أ ب = ... سم

(كفر شكر - القليوبية - ١٩)

(أ) ١٢　(ب) ٦　(جـ) ٤　(د) ٣

---

١٧ مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين فإن قياس إحدى زاويتى القاعدة ....°

(المطرية - القاهرة - ٢٠)

(أ) ٣٠　(ب) ٤٥　(جـ) ٦٠　(د) ٩٠

---

١٨ فى الشكل المقابل :

س + ص = ...

(أ) ١٠٠°　(ب) ١٤٠°　(جـ) ١٨٠°　(د) ٢٨٠°

(المطرية - القاهرة - ١٩)

ثانيًا　أسئلة الإكمال

١ متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى .... (بورفؤاد - بورسعيد - ١٩)

---

٢ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين .... (السنطة - الغربية - ٢٠)

---

٣ منصف زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين يكون .... على القاعدة و ....

(فارسكور - دمياط - ٢٠)

---

٤ المتوسط المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين يكون .... ، ....

(الخانكة - القليوبية - ١٩)

---

٥ المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ينصف كلًا من .... ، .... (أبو حمص - البحيرة - ١٩)

٦ المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها يكون .... (المنيا - المنيا - ٢٠)

٧ المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون ....

(الفشن - بنى سويف - ١٩)

٨ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية يساوى ٤٥° كان المثلث ....

(المنيا - المنيا - ٢٠)

٩ إذا كانت : حـ ∈ لمحور تماثل $\overline{أب}$ فإن : أحـ − ب حـ = ... (سمنود - الغربية - ٢٠)

١٠ إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون .... (ميت غمر - الدقهلية - ١٩)

١١ Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٣ ق (∠ ب)
فإن : ق (∠ حـ) = ...° (السنبلاوين - الدقهلية - ٢٠)

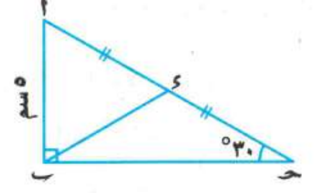
ثالثا الأسئلة المقالية

١ فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، أ ء = ء حـ ، أ ب = ٥ سم

احسب طول كل من : $\overline{حـ أ}$ ، $\overline{ب ء}$



(الإبراهيمية - الشرقية - ٢٠)

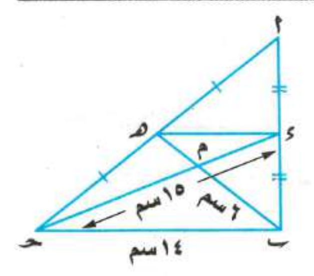
٢ فى الشكل المقابل :

م نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ

، ب م = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم

، ء حـ = ١٥ سم

أوجد : محيط Δ م ء هـ



(ميت غمر - الدقهلية - ١٩)

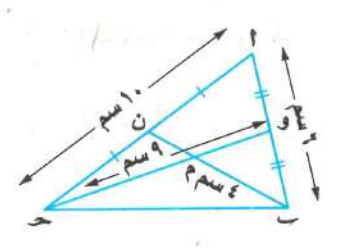
٣ في الشكل المقابل :

و ، ن منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب فإذا كان :

أب = ٦ سم ، أحـ = ١٠ سم

، ب م = ٤ سم ، حـ و = ٩ سم

أوجد : محيط الشكل أ و م ن



(أبو حمص - البحيرة - ١٩)

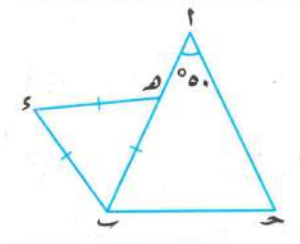
---

٤ في الشكل المقابل :

أب = أحـ

، ق (∠ أ) = ٥٠° ، ب ء = ب هـ = ء هـ

أوجد : ق (∠ ء ب حـ)



(المطرية - القاهرة - ١٩)

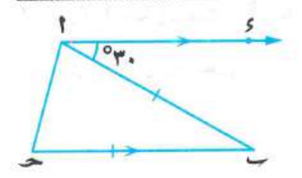
---

٥ في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أء}$ // $\overline{حـ ب}$ ، ق (∠ ء أ ب) = ٣٠°

، ب أ = ب حـ

أوجد : قياس كل زاوية من زوايا Δ أ ب حـ



(أبو حمص - البحيرة - ١٩)

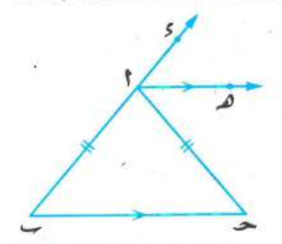
---

٦ في الشكل المقابل :

أب = أحـ

، $\overrightarrow{أهـ}$ // $\overline{ب حـ}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ ء أ حـ



(الجمرك - الإسكندرية - ٢٠)

---

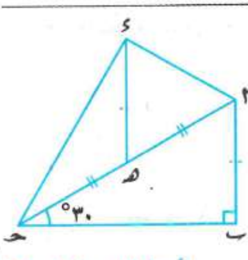
٧ في الشكل المقابل :

أب = ء هـ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

، ق (∠ ب) = ٩٠°

، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

أثبت أن : ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°



(أبو قرقاص - المنيا - ٢٠)

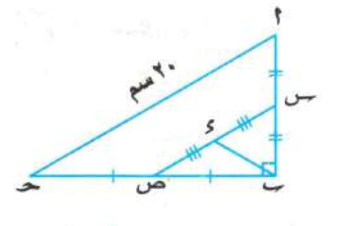
٨ في الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، ص منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$

، أ حـ = ٢٠ سم

أوجد : طول $\overline{\text{ب ء}}$



(صدفا - أسيوط - ١٩)

---

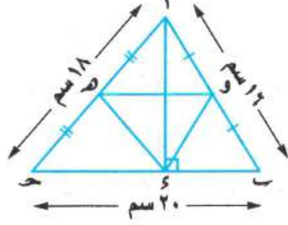
٩ في الشكل المقابل :

أ ب = ١٦ سم ، أ حـ = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٠ سم

، و ، هـ منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$ على الترتيب

، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

أوجد : محيط △ ء هـ و



(غرب طنطا - الغربية - ٢٠)

---

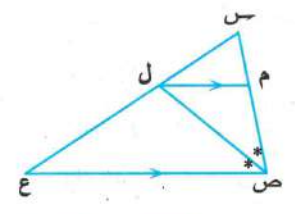
١٠ في الشكل المقابل :

△ س ص ع فيه $\overleftarrow{\text{ص ل}}$ ينصف ∠ س ص ع

ويقطع $\overline{\text{س ع}}$ في ل

، رسم $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ويقطع $\overline{\text{س ص}}$ في م

أثبت أن : △ ل م ص متساوى الساقين



(أبو قرقاص - المنيا - ٢٠)

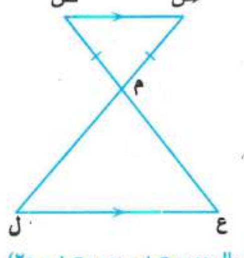
---

١١ في الشكل المقابل :

س م = ص م

، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$

أثبت أن : △ م ل ع متساوى الساقين



(شمال بورسعيد - بورسعيد - ٢٠)

---

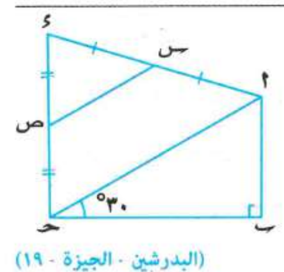
١٢ في الشكل المقابل :

ق (∠ ب) = ٩٠°

، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

، س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$ على الترتيب

أثبت أن : أ ب = س ص



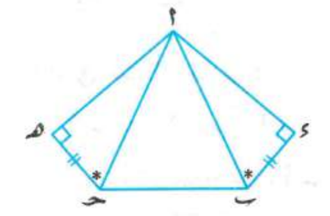
(البدرشين - الجيزة - ١٩)

١٣ في الشكل المقابل :

أب = أحـ

، ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ هـ)

أثبت أن : أ ء = أ هـ (٦ أكتوبر - الجيزة - ١٩)



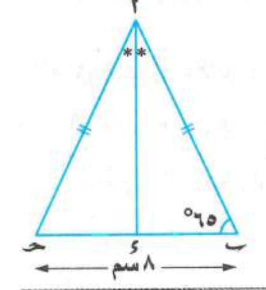
١٤ في الشكل المقابل :

ب ء = حـ هـ

، ق (∠ ء) = ق (∠ هـ) = ٩٠°

ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ حـ هـ)

أثبت أن : ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب)



(ساحل سليم - أسيوط - ١٩)

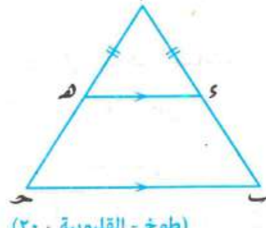
١٥ في الشكل المقابل :

أب = أحـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، ب حـ = ٨ سم

، ق (∠ ب) = ٦٥°

أثبت أن : $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

وأوجد : طول $\overline{\text{ء حـ}}$ ، ق (∠ ء أ حـ) (الخصوص - القليوبية - ٢٠)

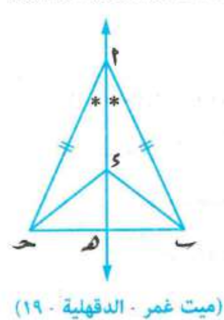


١٦ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

، أ ء = أ هـ

برهن أن : $\triangle$ أ ب حـ متساوى الساقين.



(طوخ - القليوبية - ٢٠)

١٧ في الشكل المقابل :

أب = أحـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}} \cap \overline{\text{ب حـ}} = \{\text{هـ}\}$

، ء ∈ $\overline{\text{أ هـ}}$ برهن أن :

[١] ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

[٢] ب ء = حـ ء

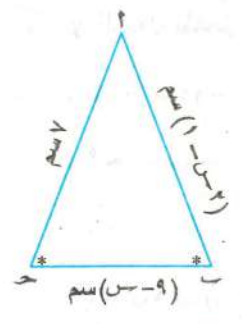
(ميت غمر - الدقهلية - ١٩)

١٨ في الشكل المقابل :

ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

[١] **أوجد :** قيمة س

[٢] **أوجد :** محيط △ أ ب حـ



(أبو حمص - البحيرة - ١٩)

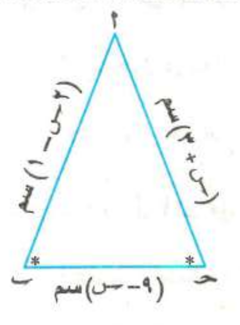
١٩ في الشكل المقابل :

أ ب = (٢ س − ١) سم ، أ حـ = (س + ٣) سم

، ب حـ = (٩ − س) سم

، ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

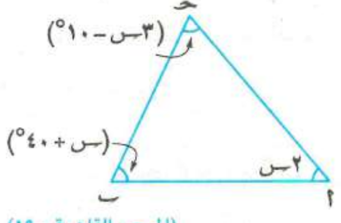
أوجد : محيط △ أ ب حـ



(دمنهور - البحيرة - ١٩)

٢٠ في الشكل المقابل :

أثبت أن : △ أ ب حـ متساوى الساقين.



(المرج - القاهرة - ١٩)

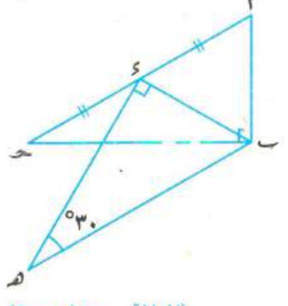
٢١ في الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠°

، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

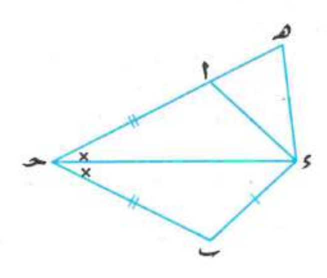
، ق (∠ ب هـ ء) = ٣٠°

أثبت أن : أ حـ = ب هـ



(المراغة - سوهاج - ٢٠)

٢٢ **في الشكل المقابل :**



ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ ب حـ ء)

، أ حـ = ب حـ

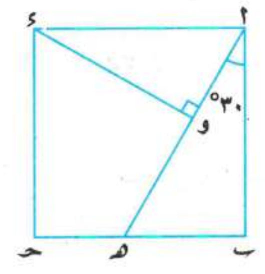
، ء ب = ء هـ

أثبت أن : ق (∠ هـ) = ق (∠ هـ أ ء)

(دسوق - كفر الشيخ - ١٩)

---

٢٣ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء مربع

، ق (∠ ب أ هـ) = °٣٠

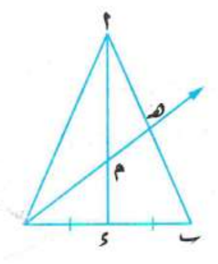
، $\overline{\text{ءو}}$ ⊥ $\overline{\text{أهـ}}$ فإذا كان أ و = ٤ سم

احسب : مساحة المربع.

(فرشوط - قنا - ٢٠)

---

٢٤ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث ، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، م ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ بحيث أ م = ٢ م ء

، رسم $\overrightarrow{\text{حـ م}}$ يقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في هـ ، هـ حـ = ١٢ سم

أوجد : طول $\overline{\text{هـ م}}$

(غرب - الإسكندرية - ١٩)

التبايـــن

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ Δ أ ب حـ فيه : أ ب $<$ أ حـ فإن : ق (∠ ب) .... ق (∠ حـ) (حلوان - القاهرة - ١٩)

(أ) $>$ (ب) $\geq$ (جـ) $<$ (د) $=$

---

٢ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٣ سم ، ٦ سم فإن طول الضلع الثالث ينتمى إلى .... (فارسكور - دمياط - ٢٠)

(أ)]٣ ، ٩] (ب)]٣ ، ٩[(جـ) [٣ ، ٩[(د) [٣ ، ٩]

---

٣ المثلث أ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٧٠° ، ق (∠ حـ) = ٥٠° فإن : أ حـ .... أ ب (الدقى - الجيزة - ٢٠)

(أ) $>$ (ب) $\geq$ (جـ) $<$ (د) $=$

---

٤ Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) $>$ ق (∠ ب) فإن : ب حـ .... أ حـ (غرب الفيوم - الفيوم - ١٩)

(أ) $<$ (ب) $=$ (جـ) $>$ (د) $\leq$

---

٥ الأطوال ٤ سم ، ٩ سم ، .... سم تصلح أطوال أضلاع مثلث. (دسوق - كفر الشيخ - ١٩)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

---

٦ Δ س ص ع قائم الزاوية فى ص فإن : س ع .... ص ع (قلين - كفر الشيخ - ١٩)

(أ) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) $\geq$

---

٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ١٠٠° فإن أكبر أضلاعه طولًا .... (فاقوس - الشرقية - ٢٠)

(أ) $\overline{\text{أ حـ}}$ (ب) $\overline{\text{أ ب}}$ (جـ) $\overline{\text{ب حـ}}$ (د) غير ذلك.

---

٨ الأعداد التى تصلح أطوال أضلاع مثلث هى .... (ساحل سليم - أسيوط - ١٩)

(أ) ٧ ، ٧ ، ٤ (ب) ٣ ، ٤ ، ٩ (جـ) ٤ ، ٥ ، ١٢ (د) ٥ ، ٥ ، ١٥

٩ فى $\triangle$ أ ب حـ يكون : أ ب + ب حـ - أ حـ > .... (نبروه - الدقهلية - ٢٠)

(أ) ٢ أ حـ (ب) -٢ أ حـ (جـ) ٢ (د) صفر

---

١٠ المثلث المتساوى الساقين الذى طولا ضلعين فيه : ٢ سم ، ٥ سم يكون طول الضلع الثالث .... سم (شرق مدينة نصر - القاهرة - ٢٠)

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

---

١١ المثلث الذى أطوال أضلاعه ٢ سم ، (س + ٣) سم ، ٧ سم يكون متساوى الساقين عندما س = ... (كفر الدوار - البحيرة - ١٩)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

١٢ طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين. (الجمرك - الإسكندرية - ٢٠)

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\geq$

ثانيًا أسئلة الإكمال

١ إذا اختلف قياسا زاويتين فى المثلث فأكبرهما فى القياس .... (السنطة - الغربية - ٢٠)

---

٢ إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله ....

(القاهرة الجديدة - القاهرة - ٢٠)

---

٣ $\triangle$ أ ب حـ فيه : ق($\angle$ أ) = ٥٠° ، ق($\angle$ ب) = ٦٠°

فإن أكبر أضلاعه طولًا هو .... (ساحل سليم - أسيوط - ١٩)

---

٤ المثلث أ ب حـ فيه : ق($\angle$ أ) = ١٠٠° فإن أكبر أضلاعه طولًا هو ....

(غرب - الإسكندرية - ١٩)

---

٥ فى $\triangle$ أ ب حـ يكون : أ ب + ب حـ .... أ حـ (شرق طنطا - الغربية - ٢٠)

---

٦ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٥ سم ، ٩ سم

فإن طول الضلع الثالث $\in$]............... ، ....[(وسط القاهرة - القاهرة - ٢٠)

٧ بعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول .... المرسومة من هذه النقطة إلى هذا المستقيم المعلوم. (المحمودية - البحيرة - ٢٠)

٨ أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولًا هو .... (البدرشين - الجيزة - ١٩)

٩ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب) = ٨٠° فإن : أ ب > .... (منية النصر - الدقهلية - ٢٠)

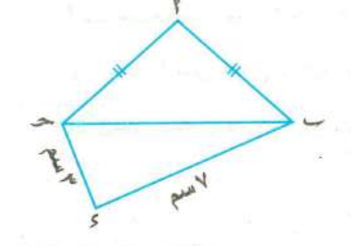
١٠ إذا كان : س > ص ، أ > ب فإن : ص + ب < .... (بندر كفر الدوار - البحيرة - ١٩)

ثالثًا الأسئلة المقالية

١ Δ أ ب حـ فيه : ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٨٠°
رتب أطوال أضلاع Δ أ ب حـ تنازليًا. (شرق مدينة نصر - القاهرة - ٢٠)

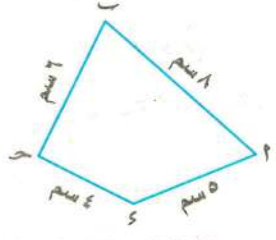
٢ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ٧ سم
رتب قياسات زوايا المثلث أ ب حـ تصاعديًا. (أبو حماد - الشرقية - ٢٠)

٣ فى الشكل المقابل :
أ ب = أ حـ ، ب ء = ٧ سم
، ء حـ = ٣ سم
أثبت أن : ق(∠أ حـ ء) > ق(∠أ ب ء)



(٦ أكتوبر - الجيزة - ١٩)

٤ فى الشكل المقابل :
برهن أن : ق(∠ب حـ ء) > ق(∠ب أ ء)



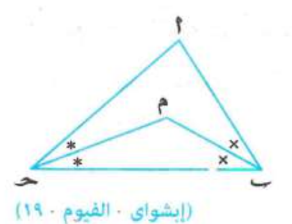
(دار السلام - القاهرة - ٢٠)

٥ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب < أ جـ

، ب م ينصف ∠ أ ب جـ ، جـ م ينصف ∠ أ جـ ب

أثبت أن : ب م < جـ م



(إبشواى - الفيوم - ١٩)

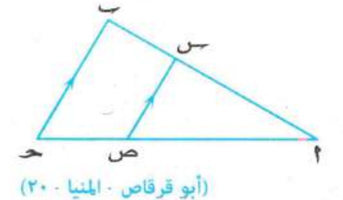
---

٦ في الشكل المقابل :

△ أ ب جـ فيه : أ ب > ب جـ

، س ص // ب جـ

أثبت أن : أ س > س ص



(أبو قرقاص - المنيا - ٢٠)

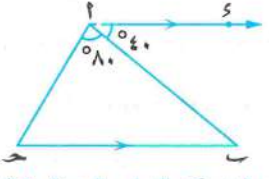
---

٧ في الشكل المقابل :

أ ء // جـ ب ، ق (∠ ء أ ب) = ٤٠°

، ق (∠ ب أ جـ) = ٨٠°

برهن أن : أ ب > أ جـ



(بندر كفر الدوار - البحيرة - ١٩)

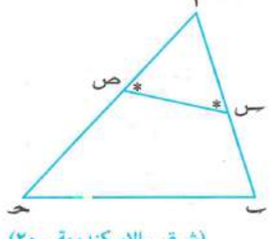
---

٨ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ جـ > أ ب

، ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

أثبت أن : ص جـ > س ب



(شرق - الإسكندرية - ٢٠)

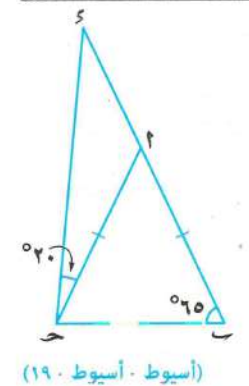
---

٩ في الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، ق (∠ أ ب جـ) = ٦٥°

، ق (∠ أ جـ ء) = ٢٠°

برهن أن : أ ب > أ ء



(أسيوط - أسيوط - ١٩)

١٠ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

، أ ء = ب ء

برهن أن : ب جـ > أ جـ



(الفشن - بنى سويف - ١٩)

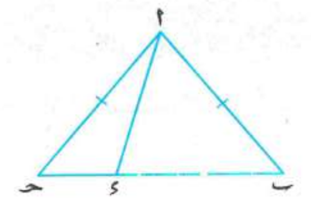
---

١١ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ

، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن : أ جـ > أ ء



(الإبراهيمية - الشرقية - ٢٠)

---

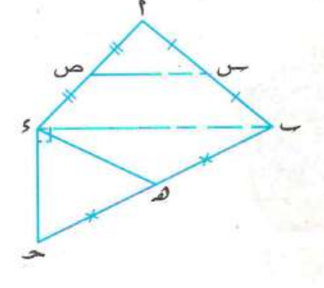
١٢ في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : ق (∠ ب ء جـ) = ٩٠°

، س ، ص ، هـ منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب

أثبت أن : س ص < ء هـ



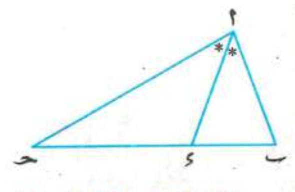
(المعادى - القاهرة - ٢٠)

---

١٣ في الشكل المقابل :

$\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

أثبت أن : أ جـ > ء جـ



(السنبلاوين - الدقهلية - ١٩)

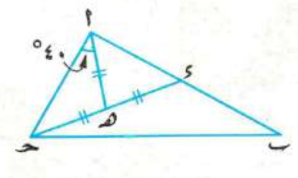
---

١٤ في الشكل المقابل :

ء هـ = هـ جـ = أ هـ

، ق (∠ جـ أ هـ) = ٤٠°

أثبت أن : [١] أ جـ > أ هـ [٢] ب جـ > أ جـ



(بلقاس - الدقهلية - ١٩)

الامتحانات النهائيـــة

فى الهندســـــة

- نماذج امتحانات الكتاب المدرسى.
- امتحانات بعض مدارس المحافظات.



نموذج 1

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 أكمل ما يأتى :

[1] أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً هو ....

[2] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٢ سم ، ٧ سم

فإن : .... < طول الضلع الثالث < ....

[3] إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس ....

[4] إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن ....

[5] إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين = ٦٠° كان المثلث ....

---

2 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

فإن : ق(∠ أ حـ ء) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

[2] فى المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان أ حـ = ٢٠ سم

فإن طول المتوسط المرسوم من ب يساوى ....

(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٦ سم (د) ٥ سم

[3] س ص ع مثلث فيه : ق(∠ ع) = ٧٠° ، ق(∠ ص) = ٦٠°

فإن : ص ع .... س ص

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ضعف

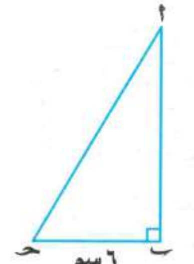
[4] الأعداد التى تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث هى ....

(أ) ٠ ، ٣ ، ٥ (ب) ٣ ، ٣ ، ٥ (جـ) ٣ ، ٣ ، ٦ (د) ٣ ، ٣ ، ٧

[٥] المثلث الذى فيه قياسا زاويتين ٤٢° ، ٦٩° يكون ....

(أ) متساوى الساقين. (ب) متساوى الأضلاع.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.



[٦] فى الشكل المقابل :

ق (∠ حـ) = ٢ ق (∠ أ) ، ب حـ = ٦ سم

فإن : أ حـ = ... سم

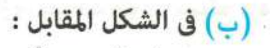
(أ) ٣ (ب) ٦

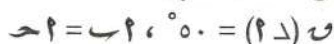
(جـ) ٩ (د) ١٢

---

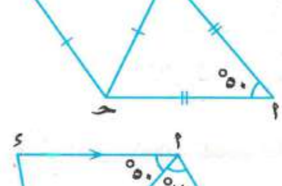
٣ (أ) أكمل :

Δ أ ب حـ فيه : أ ب > أ حـ فإن : ق (∠ حـ) .... ق (∠ ب)

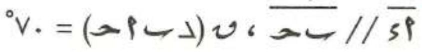

(ب) فى الشكل المقابل :


ق (∠ أ) = ٥٠° ، أ ب = أ حـ


، Δ ء ب حـ متساوى الأضلاع أوجد : ق (∠ أ ب ء)

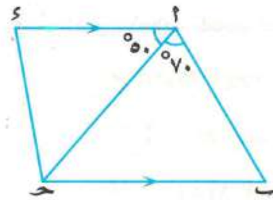


(جـ) فى الشكل المقابل :


أ ء // ب حـ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء أ حـ) = ٥٠°

أثبت أن : ب حـ > أ حـ



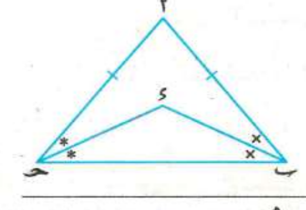
---

٤ (أ) برهن أن : زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.

(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ب ء ينصف ∠ ب ، حـ ء ينصف ∠ حـ

أثبت أن : Δ ء ب حـ متساوى الساقين.

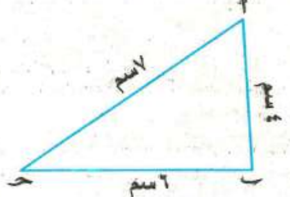


---

٥ (أ) فى الشكل المقابل :

رتب زوايا Δ أ ب حـ

ترتيبًا تنازليًا حسب القياس.



(ب) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب} > \overline{ب حـ}$ ، $\overline{س ص} // \overline{ب حـ}$

أثبت أن : أ س > س ص

نموذج ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المثلث الذى له ثلاثة محاور تماثل هو المثلث ....

(أ) المختلف الأضلاع. (ب) المتساوى الساقين.

(جـ) القائم الزاوية. (د) المتساوى الأضلاع.

[٢] مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أكبر من (ب) أصغر من (جـ) يساوى (د) ضعف

[٣] مثلث متساوى الساقين طولا ضلعين فيه ٨ سم ، ٤ سم

فإن طول الضلع الثالث .... سم

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ١٢

[٤] إذا كان Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ب) = ١٣٠° فإن أكبر أضلاعه طولاً هو ....

(أ) $\overline{ب حـ}$ (ب) $\overline{أ حـ}$ (جـ) $\overline{أ ب}$ (د) متوسطه.

[٥] Δ س ص ع متساوى الساقين فيه : ق (∠س) = ١٠٠°

فإن : ق (∠ص) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٦٠° (د) ٤٠°

[٦] فى الشكل المقابل :

س + ص = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٤٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٨٠°

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية يساوى ٤٥° كان المثلث ....

[٢] طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين.

[٣] إذا كانت : أب ≡ س ص فإن : أب = ...

[٤] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (∠ ب) = ٩٠°

فإن : ب حـ = ... أ حـ

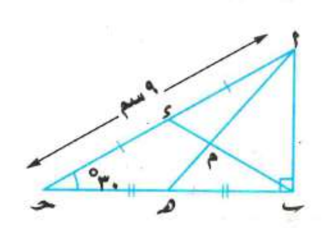
[٥] محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم .... من منتصفها.

---

٣ (أ) المثلث أ ب حـ فيه : أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٦ سم

رتب تصاعديًا قياسات زواياه.

(ب) **فى الشكل المقابل :**



Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

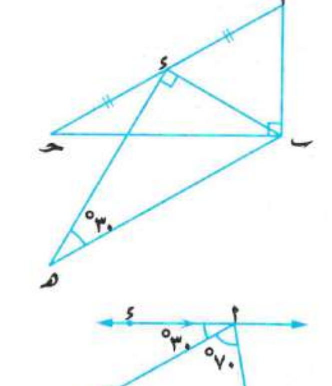
، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ء منتصف أحـ

، هـ منتصف ب حـ ، أ حـ = ٩ سم

أوجد : طول كل من ب ء ، ب م ، أ ب

---

٤ (أ) **فى الشكل المقابل :**



ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠°

، ق (∠ هـ) = ٣٠° ، ء منتصف أحـ

أثبت أن : أ حـ = ب هـ

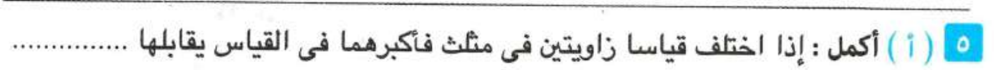


(ب) **فى الشكل المقابل :**

أ ء // ب حـ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

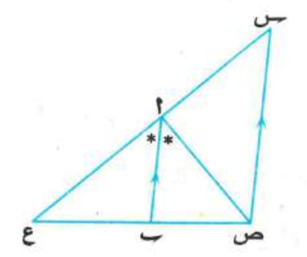
، ق (∠ ء أ حـ) = ٣٠°

أثبت أن : أ حـ > ب حـ



٥ (أ) **أكمل :** إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ....

(ب) **فى الشكل المقابل :**



أ ب // س ص

، أ ب ينصف ∠ ص أ ع

برهن أن : س ع > ص ع

نموذج امتحان للطلاب المدمجين

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل العبارات التالية :

[١] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : .... من جهة القاعدة.

[٢] فى المثلث القائم الزاوية طول المتوسط الخارج من رأس القائمة يساوى ....

[٣] زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

[٤] Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ب) = ٧٠° ، ق (∠حـ) = ٥٠° فإن : أ حـ .... أ ب

[٥] متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس يكون .... على القاعدة.

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع فإن : ق (∠ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٧٠° (د) ٩٠°

[٢] طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٢

[٣] إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوى الساقين ٨٠° فإن قياس زاوية القاعدة يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٣٠° (د) ٥٠°

[٤] عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

[٥] Δ أ ب حـ فيه : ق (∠أ) = ٥٠° ، ق (∠ب) = ٦٠°

فإن أكبر الأضلاع طولاً ....

(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) $\overline{\text{ب حـ}}$ (جـ) $\overline{\text{أ حـ}}$

٣ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، أ ب = ٥ سم

أوجد : طول $\overline{\text{أ حـ}}$

∵ ق (∠ ب) = ...° ، ق (∠ حـ) = ...°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ × .... ∴ أ حـ = ... سم

---

٤ (أ) Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٧٥° ، ق (∠ حـ) = ٦٥°

رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

(ب) **في الشكل المقابل :**

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

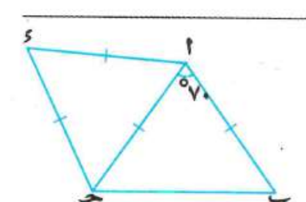
أكمل :

[١] ق (∠ ب) = ...°

[٢] الضلع .... هو أطول أضلاع Δ أ ب حـ



٥ في الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ = حـ ء = أ ء = ١٠ سم

، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ :

[١] ق (∠ ب) = ٥٥° ( )

[٢] ق (∠ ء) = ٧٠° ( )

[٣] ق (∠ ء حـ ب) = ١٢٠° ( )

[٤] أ ب + أ ء = ٢٠ سم ( )

[٥] أ ب + ب حـ = ب حـ + حـ ء ( )



١ محافظة القاهرة — إدارة حلوان، توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] عدد متوسطات المثلث المختلف الأضلاع يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

[٢] فى المثلث أ ب جـ إذا كان : أ ب > ب جـ فإن : ق (∠ أ) .... ق (∠ جـ)

(أ) > (ب) ≤ (جـ) = (د) <

[٣] المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ل سم ، ٧ سم متساوى الساقين عندما ل = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

[٤] إذا كان طول أى ضلع فى مثلث = $\frac{١}{٣}$ محيطه فإن عدد محاور تماثل المثلث يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

[٥] طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

(أ) نصف (ب) ربع (جـ) ثلث (د) ضعف

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين .... ، ....

[٢] إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول ....

[٣] إذا كان طول ضلع مثلث متساوى الأضلاع = ١٢ سم فإن ارتفاعه = ... سم

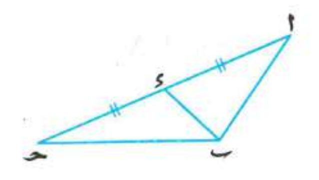
[٤] محور القطعة المستقيمة هو المستقيم ....

---

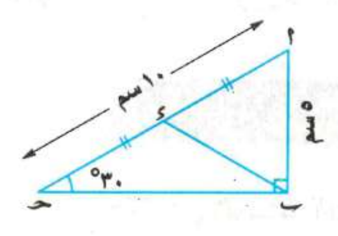
٣ (أ) فى الشكل المقابل :

$\overline{ب ء}$ متوسط فى Δ أ ب جـ ، ب ء < أ ء

برهن أن : ∠ أ ب جـ منفرجة.



(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء منتصف $\overline{أح}$

، أ ب = ٥ سم ، أ ح = ١٠ سم

، ق (∠ ح) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ ب ء ح)

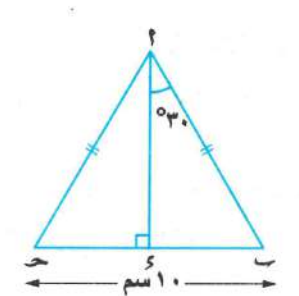
---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ // $\overline{ءهـ}$

، ح هـ = ح ء

أثبت أن : Δ أ ب ح متساوى الساقين.





(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ح ، ب ح = ١٠ سم

، ق (∠ ب أ ء) = ٣٠° ، $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{ب ح}$

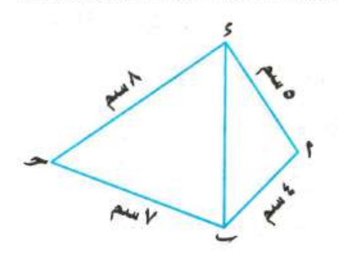
[١] أوجد : طول $\overline{أء}$

[٢] ما عدد محاور تماثل المثلث أ ب ح ؟

---

٥ (أ) فى الشكل المقابل :

أثبت أن : ق (∠ أ ب ح) > ق (∠ أ ء ح)



(ب) Δ أ ب ح فيه : أ ب = ٦ سم ، أ ح = ٨ سم ، ب ح = ٧ سم

رتب قياسات زوايا المثلث تصاعديًا.



٢ إدارة دار السلام توجيه الرياضيات - الفترة الصباحية — محافظة القاهرة

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة :

[١] الزاوية التى قياسها ٧٠° تكملها زاوية قياسها ....

(أ) ٢٠°　　(ب) ٧٠°　　(جـ) ١١٠°　　(د) ٣٠°

[٢] Δ أ ب حـ فيه : $\overline{ب ء}$ متوسط ، ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ　فإن : ق (∠ب) = ...

(أ) ٣٠°　　(ب) ٦٠°　　(جـ) ٩٠°　　(د) ١٠٠°

[٣] الأطوال ٤ سم ، ٩ سم ، .... سم تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٦

[٤] Δ س ص ع متساوى الساقين فيه : ق (∠س) = ١٠٠°

فإن : ق (∠ص) = ...

(أ) ١٠٠°　　(ب) ٨٠°　　(جـ) ٦٠°　　(د) ٤٠°

[٥] Δ أ ب حـ فيه : أ ب < أ حـ　فإن : ق (∠ب) .... ق (∠حـ)

(أ) ≥　　(ب) <　　(جـ) =　　(د) >

---

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين ....

[٢] عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية يساوى ....

[٣] مثلث متساوى الساقين قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون عدد محاور تماثله ....

[٤] إذا اختلف قياسا زاويتين فى المثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ....

---

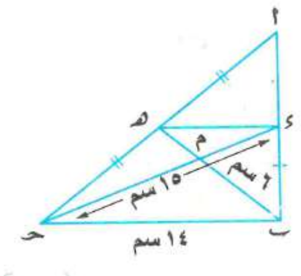
٣ (أ) فى الشكل المقابل :

م هى نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

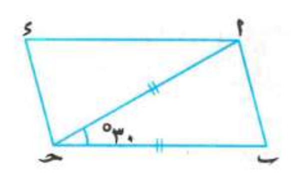
، ب م = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم

، ء حـ = ١٥ سم

أوجد : محيط Δ م ء هـ



(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع

، أ حـ = ب حـ ، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ء)

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



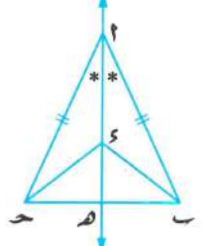
ق (∠ ب) = ٩٠°

، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

، س ، ص منتصفا $\overline{أء}$ ، $\overline{ءحـ}$ على الترتيب.

أثبت أن : أ ب = س ص

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ينصف ∠ ب أ حـ

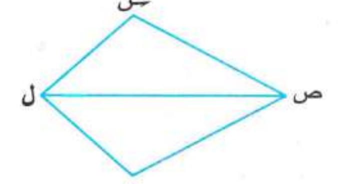
، ء ∈ $\overline{أهـ}$

أثبت أن : [١] ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

[٢] ب ء = حـ ء

---

٥ (أ) Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٧٥° رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.



(ب) فى الشكل المقابل :

س ص > س ل

، ص ع > ع ل

أثبت أن : ق (∠ س ل ع) > ق (∠ س ص ع)



٣ إدارة شمال الجيزة
توجيه الرياضيات - صباحى (أ)

محافظة الجيزة

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] عدد محاور تماثل المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٤٠° ، ٧٠° هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

[٢] الأطوال ٤ سم ، ٩ سم ، .... سم تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

[٣] القطران متساويان فى الطول وغير متعامدين فى ....

(أ) المربع. (ب) المعين.

(جـ) المستطيل. (د) متوازى الأضلاع.

[٤] Δ س ص ع فيه : س ص > س ع فإن : ق (∠ ص) .... ق (∠ ع)

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≤

[٥] أ ب جـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° ، ٢ أ ب − أ جـ = صفر

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

---

٢ أكمل ما يلى :

[١] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ١ : .... من جهة القاعدة.

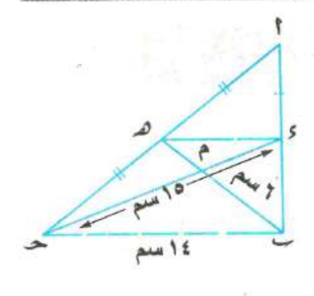
[٢] قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....°

[٣] الزاوية التى قياسها ٧٠° تتمم زاوية قياسها ....°

[٤] مثلث طولا ضلعين فيه ٥ سم ، ٧ سم فإن محيطه ∈] .... ، .... [

---

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



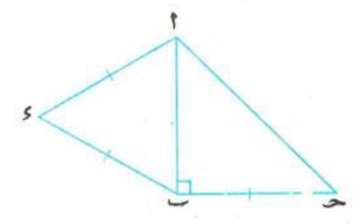
م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ

، ب م = ٦ سم ، ب جـ = ١٤ سم

، ء جـ = ١٥ سم

أوجد : محيط Δ م ء هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



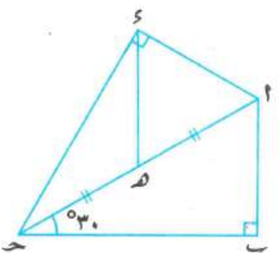
أ ب = ب جـ = أ ء = ب ء

، ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

أوجد : ق (∠ ء أ جـ)

٤ **(أ)** أ ب جـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٨٠°

رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعديًا.



(ب) فى الشكل المقابل :

ق (∠ ب) = ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠°

، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ق (∠ أ جـ ب) = ٣٠°

أثبت أن : أ ب = ء هـ

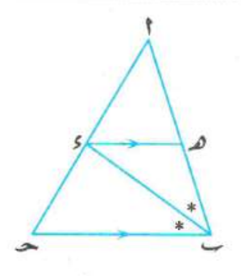
٥ **(أ) فى الشكل المقابل :**



$\overline{\text{هـ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

أثبت أن : △ هـ ب ء متساوى الساقين.

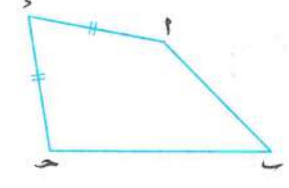


(ب) فى الشكل المقابل :

أ ء = ء جـ

، ب جـ > أ ب

برهن أن : ق (∠ أ) > ق (∠ جـ)



٤ إدارة العجمى
توجيه الرياضيات - مدارس خاصة (ج)

محافظة الإسكندرية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **أكمل بالإجابة الصحيحة :**

[١] مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة واحدة يساوى ....°

[٢] △ أ ب جـ فيه : ق (∠ أ) = ١٠٠° فإن أطول ضلع من أضلاعه ....

[٣] إذا كان ٥ سم ، ٨ سم طولى ضلعين فى مثلث فإن أكبر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث يساوى .... سم

[٤] طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى .... طول الوتر.

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الزاوية التى قياسها °٧٠ تكمل زاوية قياسها ....

(أ) °٢٠ (ب) °٧٠ (جـ) °١١٠ (د) °١٨٠

[٢] طول أى ضلع فى المثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين.

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ضعف

[٣] Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ فإن الزاوية الخارجة عند الرأس حـ تكون ....

(أ) مستقيمة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) حادة.

[٤] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٤ : .... من جهة القاعدة.

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٨ (د) ٤

[٥] Δ أ ب حـ فيه : أ حـ > أ ب فإن : ق (∠ ب) .... ق (∠ حـ)

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≥

---

٣ (أ) فى الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

، $\overline{بهـ} \cap \overline{حـء} = \{م\}$ ، ب حـ = ١٠ سم

، ب م = ٨ سم ، حـ م = ٦ سم

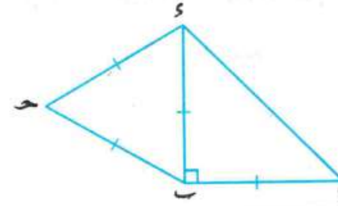
احسب : محيط Δ ء م هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = ب ء = ء حـ = ب حـ

، ق (∠ أ ب ء) = °٩٠



أوجد : ق (∠ أ ء حـ)

---

٤ (أ) مثلث أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = °٥٠ ، ق (∠ ب) = °٧٠



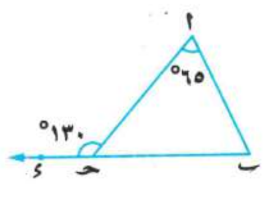
رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

(ب) فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ) = °٦٥

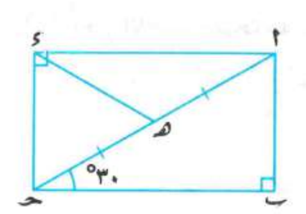
، ء ∈ $\overleftarrow{بحـ}$

، ق (∠ أ حـ ء) = °١٣٠



أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

٥ (أ) فى الشكل المقابل :



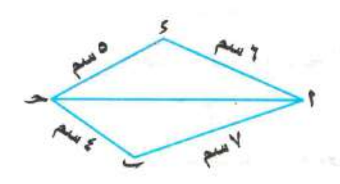
ق (∠ب) = ق (∠ا ء حـ) = ٩٠°

، ق (∠ا حـ ب) = ٣٠°

، هـ منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

أثبت أن : ا ب = ء هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



ا ب = ٧ سم ، ب حـ = ٤ سم

، حـ ء = ٥ سم

، ء ا = ٦ سم

أثبت أن : ق (∠ب حـ ء) > ق (∠ب ا ء)



٥ إدارة طوخ
توجيه الرياضيات - الفترة الصباحية
محافظة القليوبية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الأطوال ٦ سم ، ٤ سم ، .... سم تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ٥ (د) ٢

[٢] المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون له .... محور تماثل.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

[٣] △ ا ب حـ متساوى الساقين فيه : ق (∠ا) = ١٠٠° فإن : ق (∠ب) = ...

(أ) ٨٠° (ب) ١٠٠° (جـ) ٤٠° (د) ٢٠°

[٤] نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة ٥ : .... من جهة القاعدة.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ١٢

[٥] مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة ....

(أ) ٩٠° (ب) ٣٦٠° (جـ) ١٨٠° (د) ١٠٠°

٢ أكمل ما يأتي :

[١] محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم .... من منتصفها.

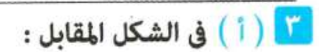
[٢] Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٧٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠°
فإن أكبر الأضلاع طولًا هو ....

[٣] منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة و ....

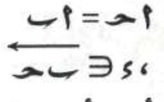
[٤] إذا كان : ق (∠ أ) > ق (∠ ب) فإن : مكملة ∠ أ .... مكملة ∠ ب

---

٣ (أ) في الشكل المقابل :



أ حـ = أ ب

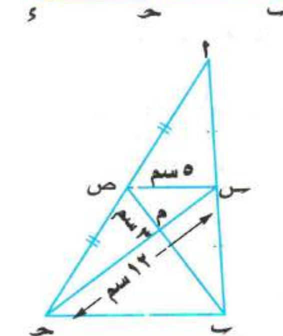


، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : ق (∠ ب) > ق (∠ ء)



(ب) في الشكل المقابل :



س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$

، $\overline{\text{ب ص}}$ ∩ $\overline{\text{حـ س}}$ = {م} ، م ص = ٣ سم

، حـ س = ١٢ سم

، س ص = ٥ سم

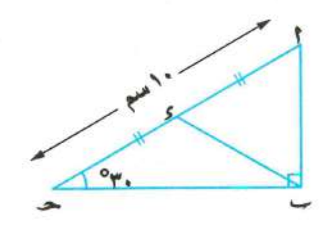
أوجد : محيط Δ م ب حـ

---

٤ (أ) Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٨٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠°

رتب أطوال أضلاع Δ أ ب حـ تصاعديًا.

(ب) في الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

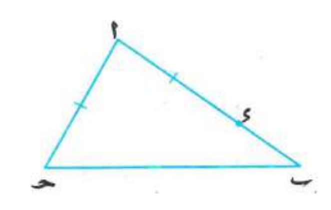
، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

، أ حـ = ١٠ سم

أوجد : محيط Δ أ ب ء

---

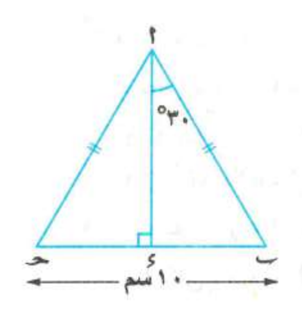
٥ (أ) في الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه : ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

بحيث أ ء = أ حـ

أثبت أن : ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)



(ب) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه :

أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، ب حـ = ١٠ سم

، ق (∠ ب أ ء) = ٣٠°

أوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$



٦ إدارة فاقوس توجيه الرياضيات — محافظة الشرقية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل العبارات بالإجابات الصحيحة :

[١] إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين هو ٦٠° كان المثلث ....

[٢] Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٦٠° فإن : ب حـ = ... أ حـ

[٣] إذا كانت : $\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{س ص}}$ فإن : ٧ أ ب − ٧ س ص = ...

[٤] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٥ سم ، ٧ سم

فإن طول الضلع الثالث ∈] .... ، .... [

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع هو ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٣

[٢] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٣ : .... من جهة القاعدة.

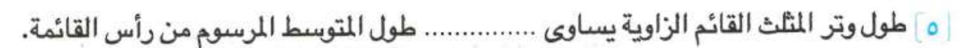
(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٢

[٣] Δ أ ب حـ فيه : أ ب > أ حـ فإن : ق (∠ ب) .... ق (∠ حـ)

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≤

[٤] Δ ء هـ و فيه : ق (∠ هـ) = ١٣٠° فإن أكبر الأضلاع طولًا ....

(أ) $\overline{\text{ء هـ}}$ (ب) $\overline{\text{ء و}}$ (جـ) $\overline{\text{هـ و}}$


[٥] طول وتر المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول المتوسط المرسوم من رأس القائمة.

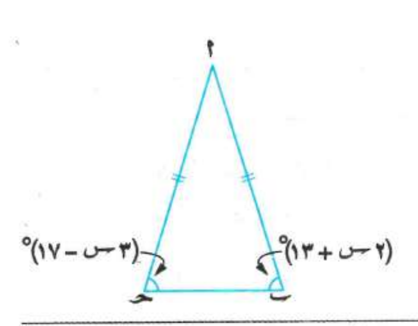
(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٣ (أ) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث أ ء = ب هـ

أثبت أن : ق (∠ ء هـ حـ) > ق (∠ هـ ء حـ)

(ب) **فى الشكل المقابل :**



أ ب = أ حـ

، ق (∠ ب) = (٢ س + ١٣)°

، ق (∠ حـ) = (٣ س − ١٧)°

أوجد : ق (∠ أ) بالدرجات.

---

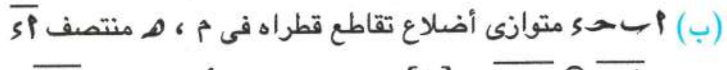
٤ (أ) **فى الشكل المقابل :**

ق (∠ ب) = ٩٠° ، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

، أ ب = ٩ سم ، ء هـ = ٩ سم

، أ هـ = هـ حـ

أثبت أن : ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°


(ب) أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

، $\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ب هـ}}$ = {ن} ، أ ن = ٨ سم **أوجد :** طول $\overline{\text{أ حـ}}$

---

٥ (أ) أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (∠ ب) = ٧٠°

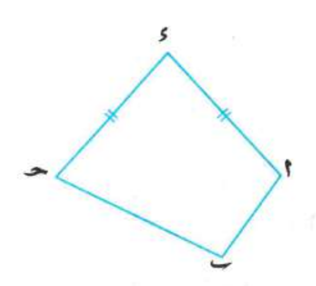
رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

(ب) **فى الشكل المقابل :**


ء أ = ء حـ

، ق (∠ ب أ ء) > ق (∠ ب حـ ء)

أثبت أن : ب حـ > أ ب





٧ إدارة كفر الزيات
توجيه الرياضيات - قطاع (٣)
محافظة الغربية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل :

[١] إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله ....

[٢] Δ س ص ع قائم الزاوية فى ص فإن أكبر الأضلاع طولاً هو ....

[٣] فى Δ أ ب حـ : ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٣٠°
فإن أكبر أضلاع المثلث طولاً هو ....

[٤] مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوى ....°

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] القطران متعامدان وغير متساويين فى الطول فى ....
(أ) المعين. (ب) المربع. (جـ) المستطيل. (د) المثلث.

[٢] قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....
(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

[٣] عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين يساوى ....
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

[٤] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٢ : .... من جهة القاعدة.
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

[٥] عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية يساوى ....
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٣ (أ) Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، أ حـ = ١٠ سم
رتب قياسات زوايا المثلث تنازليًا.

(ب) فى الشكل المقابل :
أ ء ينصف ∠ ب أ حـ ، ء ∈ ب حـ
أثبت أن : أ حـ > ء حـ

٤ (أ) فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{ص ل}}$ ينصف ∠ س ص ع

، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

أثبت أن : Δ ل م ص متساوى الساقين.

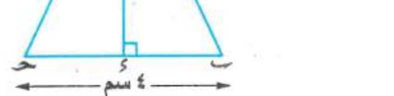
(ب) فى الشكل المقابل :

أب = أحـ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

، ق (∠ ب أ ء) = ٢٥°

، ب حـ = ٤ سم

أوجد : طول $\overline{\text{ء حـ}}$ ، ق (∠ حـ أ ب)



---

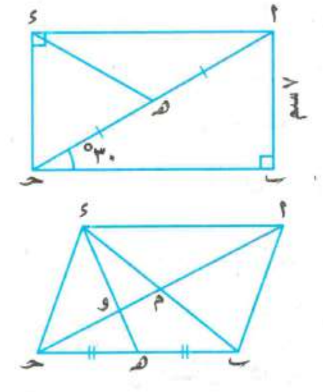
٥ (أ) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل ، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

، أ ب = ٧ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

أوجد : طول $\overline{\text{ء هـ}}$





(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ∩ $\overline{\text{أ حـ}}$ = {و}

أثبت أن : و هـ = $\frac{1}{2}$ ء و

٨ مديرية التربية والتعليم - توجيه الرياضيات — محافظة السويس

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

[٢] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة الرأس.

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ٣ : ١ (د) ١ : ٣

[٣] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٥ سم ، ١٠ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ١٥

[٤] الزاويتان المتتامتان مجموع قياسيهما ....

(أ) °٩٠ (ب) °١٨٠ (جـ) °٣٦٠ (د) °٤٥

[٥] إذا كان : أ ب جـ مثلثاً فإن : أ ب + ب جـ .... أ جـ

(أ) > (ب) < (جـ) = (د) ≥

---

٢ أكمل :

[١] عدد المربعات فى الشكل المقابل يساوى ....

[٢] منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يكون .... القاعدة وينصفها.

[٣] أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً هو ....

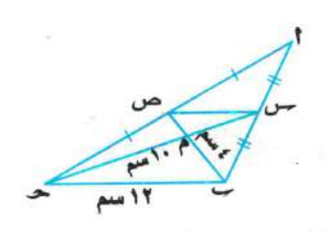
[٤] إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين °٦٠ كان المثلث ....

---

٣ (أ) Δ س ص ع فيه : ق (∠ س) = °٧٠ ، ق (∠ ص) = °٥٠

رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعديًا.

(ب) فى الشكل المقابل :



س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ب م = ٤ سم

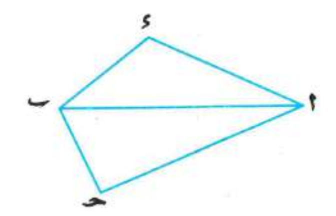
، جـ م = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم

، $\overline{\text{ب ص}} \cap \overline{\text{جـ س}}$ = {م}

أوجد : محيط المثلث س ص م

---

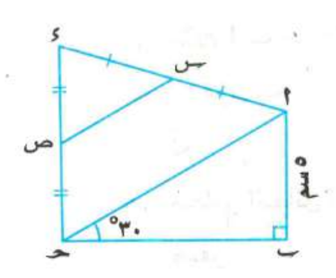
٤ (أ) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ جـ > ب جـ

، أ ء > ء ب

أثبت أن : ق (∠ جـ ب ء) > ق (∠ جـ أ ء)



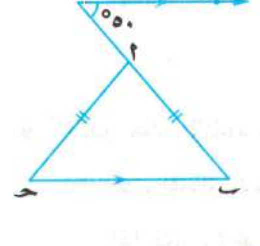
(ب) فى الشكل المقابل :

ق (∠ب) = ٩٠° ، ق (∠أحـب) = ٣٠°

، س ، ص منتصفا $\overline{أء}$ ، $\overline{حـء}$

، أب = ٥ سم

أوجد : طول كل من $\overline{أحـ}$ ، $\overline{س ص}$



٥ (أ) فى الشكل المقابل :

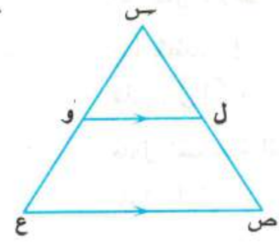
أب = أحـ



، $\overleftarrow{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$

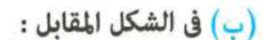
، ق (∠ء) = ٥٠°

أوجد : ق (∠ب أحـ)



(ب) فى الشكل المقابل :

س ص = س ع



، $\overline{ل و}$ // $\overline{ص ع}$

أثبت أن : س ل = س و

٩ إدارة إيتاى البارود
توجيه الرياضيات - صباحى ب
محافظة البحيرة

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] Δ أب حـ قائم الزاوية فى ب ، أب = ١٨ سم ، ق (∠حـ) = ٣٠°

فإن : أحـ = ... سم

(أ) ٣٦ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ٣

[٢] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة الرأس.

(أ) ٣ : ١ (ب) ٤ : ٢ (جـ) ١ : ٢ (د) ١ : ٣

[٣] في المثلث أ ب حـ إذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٧ سم

فإن : ق(∠ب) .... ق(∠حـ)

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≥

[٤] عدد محاور التماثل للمثلث المختلف الأضلاع يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

[٥] مثلث متساوى الساقين طولا ضلعين فيه ٦ سم ، ١٢ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

---

٢ أكمل مكان النقط بإجابة صحيحة :

[١] عدد أقطار الشكل السداسى يساوى ....

[٢] إذا كان : ء هـ و مثلثًا فإن : ء هـ + هـ و − ء و > ....

[٣] إذا كانت : ل ، م ، ن ثلاثة مستقيمات فى نفس المستوى وكان : ل ⊥ ن ، م ⊥ ن

فإن : ل ∩ م = ...

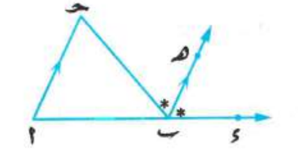
[٤] طول المتوسط الخارج من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

---

٣ (أ) أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٧٠° ، ق(∠حـ) = ٥٠°

رتب أطوال أضلاع المثلث أ ب حـ تصاعديًا.

(ب) فى الشكل المقابل :



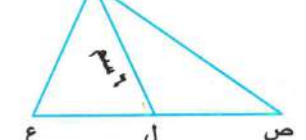
$\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ء ب حـ

، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن : ب حـ = أ ب

---

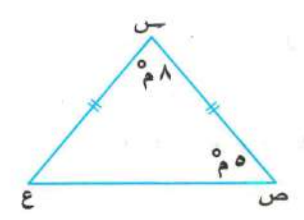
٤ (أ) فى الشكل المقابل :



س ص ع مثلث ، ل ∈ $\overline{\text{ص ع}}$

حيث س ل = ٦ سم

أثبت أن : محيط △ س ص ع > ١٢ سم

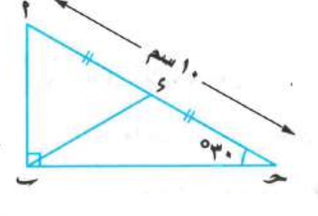


(ب) في الشكل المقابل :

س ص = س ع ، ق (∠ س) = ٨ م°

، ق (∠ ص) = ٥ م°

أوجد : ق (∠ ع) بالدرجات.

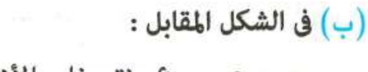


٥ (أ) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه : ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، أ حـ = ١٠ سم

أوجد : محيط المثلث أ ب ء بالبرهان.



(ب) في الشكل المقابل :

س ، ص ، ع منتصفات الأضلاع

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب

حيث أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٣ سم

، أ حـ = ٩ سم

احسب : محيط Δ س ص ع

١٠ إدارة المنيا
توجيه الرياضيات
محافظة المنيا

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] في المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠°
يساوى .... طول الوتر.

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٣}$

[٢] في Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ حـ) > ق (∠ ب) فإن : أ ب .... أ حـ

(أ) (ب) (جـ) (د)

[٣] زاويتان متساويتان في القياس ومتتامتان يكون قياس إحداهما ....

(أ) ٩٠° (ب) ٤٥° (جـ) ١٣٥° (د) ٦٠°

[٤] عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

[٥] Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ فإذا كان : ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٦٥° (جـ) ٨٠° (د) ١٣٠°

٢ أكمل كلًا مما يأتى :

[١] قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....°

[٢] مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى ....°

[٣] نقطة تلاقى متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة الرأس.

[٤] فى المثلث القائم الزاوية أكبر الأضلاع طولًا هو ....

٣ (أ) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

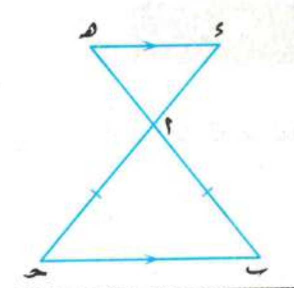
أ ب > ب حـ

، أ ء > ء حـ

أثبت أن : ق (∠ ب حـ ء) > ق (∠ ب أ ء)



(ب) فى الشكل المقابل :

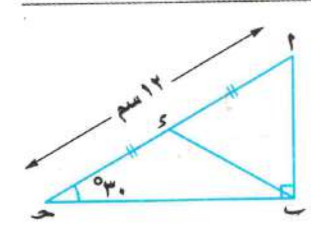


أ ب = أ حـ

، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : Δ أ ء هـ متساوى الساقين.

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، أ حـ = ١٢ سم

، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

أوجد : محيط Δ أ ب ء

(ب) في الشكل المقابل :



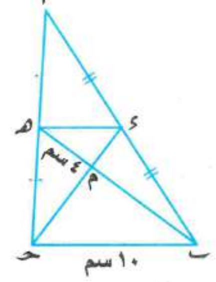
أ ب = أ جـ

، ق (∠ أ ء ب) = ٧٠° ، ق (∠ جـ أ ء) = ٢٠°

أثبت أن : أ ب > أ ء

---

٥ (أ) في الشكل المقابل :



Δ أ ب جـ فيه :

ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}} \cap \overline{\text{جـ ء}} = \{\text{م}\}$

، ء جـ = ٩ سم ، م هـ = ٤ سم

، ب جـ = ١٠ سم

أوجد : محيط Δ ء م هـ

(ب) في الشكل المقابل :

أ جـ = جـ ء = ء أ = جـ ب

، ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠°

أوجد : ق (∠ ب أ ء)

١١ إدارة طما
توجيه الرياضيات- الفترة الصباحية

محافظة سوهاج

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] مكملة الزاوية القائمة تكون زاوية ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

[٢] Δ س ص ع قائم الزاوية في ع فإن : س ص .... ع س + ع ص

(أ) $<$ (ب) $\leq$ (جـ) $=$ (د) $>$

[٣] إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ محور تماثل $\overline{\text{جـ و}}$ فإن : ء جـ = ...

(أ) ء هـ (ب) هـ و (جـ) ء و (د) هـ جـ

[٤] س ص ع ل مستطيل فإن : س ع .... ص ل

(أ) $<$ (ب) $\neq$ (جـ) $=$ (د) $>$

[٥] Δ ء هـ و منفرج الزاوية فى هـ فإن : ء و .... هـ و

(أ) < (ب) ≥ (جـ) = (د) >

٢ أكمل ما يأتى بإجابات صحيحة :

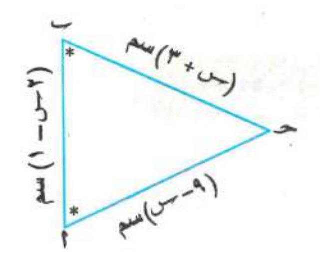
[١] Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ) = ٣٠° فإن : أ حـ = ٢ ....

[٢] Δ أ ب حـ متساوى الساقين فيه : ق (∠ حـ) = ١٠٠° فإن : ق (∠ أ) = ...°

[٣] Δ س ص ع فيه : $\overline{\text{ع أ}}$ متوسط فإن : أ س = ...

[٤] Δ ء هـ و قائم الزاوية فى و فإن أكبر الأضلاع طولاً فى Δ ء هـ و هو ....

٣ (أ) فى الشكل المقابل :

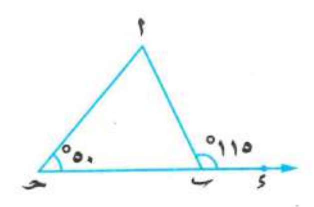


Δ س ص ع فيه : $\overline{\text{ص هـ}}$ ، $\overline{\text{ع ء}}$ متوسطان يتقاطعان فى أ

، أ ء = ٢ سم ، أ ص = ٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ص هـ}}$ ، $\overline{\text{ع أ}}$

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ب)

، أ ب = (٢ س - ١) سم

، ب حـ = (س + ٣) سم ، أ حـ = (٩ - س) سم

أوجد : محيط Δ أ ب حـ

٤ (أ) Δ س ص ع فيه : ق (∠ س) = ٨٠° ، ق (∠ ص) = ٣٠°

رتب أطوال أضلاع Δ س ص ع تصاعديًا.

(ب) فى الشكل المقابل :

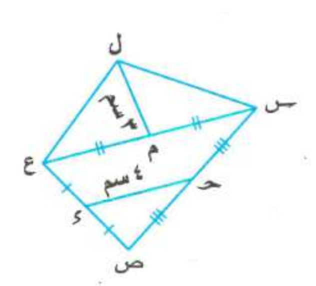
Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ حـ) = ٥٠°

، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

، ق (∠ أ ب ء) = ١١٥°

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

٥ (أ) فى الشكل المقابل :



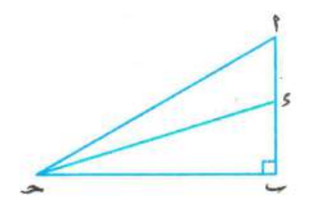
Δ س ص ع فيه : ح منتصف $\overline{\text{س ص}}$

، ء منتصف $\overline{\text{ع ص}}$ ، ح ء = ٤ سم

، Δ ل س ع فيه : $\overline{\text{ل م}}$ متوسط ، ل م = ٣ سم

بيِّن إذا كانت : ∠ س ل ع قائمة أم لا.

(ب) فى الشكل المقابل :



ق (∠ ب) = ٩٠°

، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

برهن أن : أ ح > ء ح



١٢ إدارة نجع حمادى توجيه الرياضيات — **محافظة قنا**

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة :

[١] مثلث متساوى الساقين ، إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة ٤٠°

فإن قياس زاوية رأس المثلث ....

(أ) ٤٠° (ب) ٨٠° (جـ) ١٠٠° (د) ٧٠°

[٢] عدد محاور تماثل المربع ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

[٣] Δ أ ب ح فيه : أ ب > أ ح فإن : ق (∠ ب) .... ق (∠ ح)

(أ) < (ب) ≥ (جـ) = (د) >

[٤] إذا كانت : أ ∈ محور $\overline{\text{ب ح}}$ فإن : $\overline{\text{أ ب}}$ .... $\overline{\text{أ ح}}$

(أ) // (ب) ⊥ (جـ) ≡ (د) =

[٥] Δ أ ب ح فيه : ق (∠ ب) = ١١٠° فإن : ....

(أ) أ ح < ب ح (ب) أ ب < أ ح (جـ) ب ح > أ ح (د) أ ب = أ ح

٢ أكمل ما يلى :

[١] خمس زوايا متساوية فى القياس ومتجمعة حول نقطة قياس كل منها يساوى ....°

[٢] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٥ سم ، ٧ سم

فإن طول ضلعه الثالث ∈] .... ، ....[

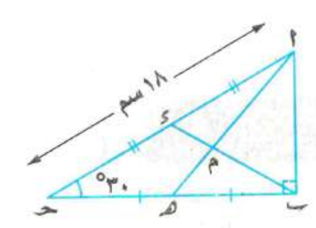
[٣] إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ ، $\overline{\text{أء}}$ متوسط

فإن : أ م = ... أء

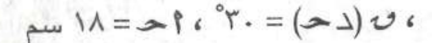
[٤] طول المتوسط الخارج من رأس الزاوية القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

---

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه : ق(∠ب) = ٩٠°



، ق(∠حـ) = ٣٠° ، أحـ = ١٨ سم

، م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

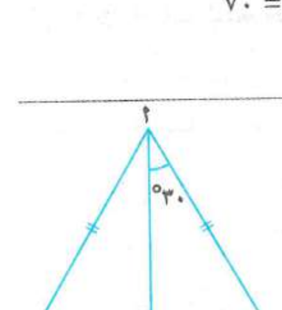
احسب : طول كل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{بم}}$

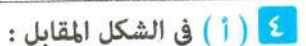
(ب) س ص ع مثلث فيه : ق(∠س) = ٥٠° ، ق(∠ص) = ٧٠°

رتب أطوال أضلاع المثلث س ص ع تصاعديًا.

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :





Δ أ ب حـ فيه : أب = أحـ ، $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{بحـ}}$

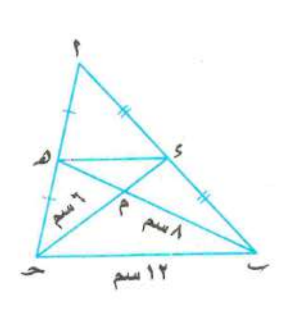
، ب حـ = ١٢ سم

، ق(∠ب أ ء) = ٣٠°

أوجد : طول كل من $\overline{\text{أب}}$ ، أء



(ب) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه : ء منتصف $\overline{\text{أب}}$

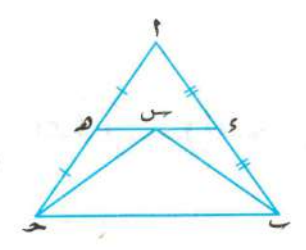
، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{بهـ}}$ ∩ $\overline{\text{حـء}}$ = {م}

، م ب = ٨ سم ، م حـ = ٦ سم

، ب حـ = ١٢ سم

احسب : محيط Δ م ء هـ

٥ (أ) فى الشكل المقابل :

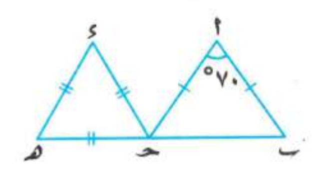


Δ أ ب حـ فيه : ء منتصف $\overline{أب}$

، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

أثبت أن : ب س + س حـ > ٢ ء هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ ، Δ ء حـ هـ متساوى الأضلاع

، ق (∠ أ) = ٧٠° ، حـ $\in$ $\overline{ب هـ}$

احسب : ق (∠ أ حـ ء)

